জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক জাতীয় শিক্ষাক্রম ২০২২ অনুযায়ী প্রণীত
এবং ২০২৪ শিক্ষাবর্ষ থেকে অষ্টম শ্রেণির জন্য নির্ধারিত পাঠ্যপুস্তক

গণিত

অষ্টম শ্রেণি

(পরীক্ষামূলক সংস্করণ)

রচনা ও সম্পাদনা

ড. মোঃ রাশেদ তালুকদার
ড. মোঃ আব্দুল হাকিম খান
ড. মোঃ আব্দুল হালিম
ড. চন্দ্রনাথ পোদ্দার
নওরীন ইয়াসমিন
তাসনিম মুশাররাত
মোঃ আহসানুল আরেফিন চৌধুরী
রতন কান্তি মন্ডল
আসিফ বায়েজিদ
সকাল রায়
মোঃ কমরউদ্দিন আকন
মো. মোখলেস উর রহমান
মোছা. নুরুন্নেসা সুলতানা

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

৬৯-৭০, মতিঝিল বাণিজ্যিক এলাকা, ঢাকা-১০০০

কর্তৃক প্রকাশিত

প্রকাশকাল: ডিসেম্বর ২০২৩

শিল্পনির্দেশনা

মঞ্জুর আহমদ

চিত্রণ

রাফাত আহমেদ বাধন

সুবির মণ্ডল

শামীম আহমেদ শান্ত

প্রচ্ছদ

ফাইয়াজ রাফিদ

গ্রাফিক্স

নূর-ই-ইলাহী

কে. এম. ইউসুফ আলী

গণপ্রজাতন্ত্রী বাংলাদেশ সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য

মুদ্রণে :

প্রসঙ্গ কথা

পরিবর্তনশীল এই বিশ্বে প্রতিনিয়ত বদলে যাচ্ছে জীবন ও জীবিকা। প্রযুক্তির উৎকর্ষের কারণে পরিবর্তনের গতিও হয়েছে অনেক দ্রুত। দ্রুত পরিবর্তনশীল এই বিশ্বের সঙ্গে আমাদের খাপ খাইয়ে নেওয়ার কোনো বিকল্প নেই। কারণ প্রযুক্তির উন্নয়ন ইতিহাসের যেকোনো সময়ের চেয়ে এগিয়ে চলেছে অভাবনীয় গতিতে। চতুর্থ শিল্পবিপ্লব পর্যায়ে কৃত্রিম বুদ্ধিমত্তার বিকাশ আমাদের কর্মসংস্থান এবং জীবনযাপন প্রণালিতে যে পরিবর্তন নিয়ে আসছে, তার মধ্য দিয়ে মানুষে মানুষে সম্পর্ক আরও নিবিড় হবে। অদূর ভবিষ্যতে অনেক নতুন কাজের সুযোগ তৈরি হবে যা এখনও আমরা জানি না। অনাগত সেই ভবিষ্যতের সাথে আমরা যেন নিজেদের খাপ খাওয়াতে পারি তার জন্য এখনই প্রস্তুতি গ্রহণ করা প্রয়োজন।

পৃথিবীজুড়ে অর্থনৈতিক প্রবৃদ্ধি ঘটলেও জলবায়ু পরিবর্তন, বায়ুদূষণ, অভিবাসন এবং জাতিগত সহিংসতার মতো সমস্যা আজ অনেক বেশি প্রকট। দেখা দিচ্ছে কোভিড ১৯ এর মতো মহামারি যা সারা বিশ্বের স্বাভাবিক জীবনযাত্রা এবং অর্থনীতিকে থমকে দিয়েছে। আমাদের প্রাত্যহিক জীবনযাত্রায় সংযোজিত হয়েছে ভিন্ন ভিন্ন চ্যালেঞ্জ এবং সম্ভাবনা।

এসব চ্যালেঞ্জ ও সম্ভাবনার দ্বারপ্রান্তে দাঁড়িয়ে তার টেকসই ও কার্যকর সমাধান এবং আমাদের জনমিতিক সুফলকে সম্পদে রূপান্তর করতে হবে। আর এজন্য প্রয়োজন জ্ঞান, দক্ষতা, মূল্যবোধ ও ইতিবাচক দৃষ্টিভঙ্গিসম্পন্ন দূরদর্শী, সংবেদনশীল, অভিযোজন-সক্ষম, মানবিক, বৈশ্বিক এবং দেশপ্রেমিক নাগরিক। এই প্রেক্ষাপটে বাংলাদেশ স্বল্পোন্নত দেশ থেকে উন্নয়নশীল দেশে উত্তরণ এবং ২০৪১ সালের মধ্যে উন্নত দেশে পদার্পণের লক্ষ্যমাত্রা অর্জনের প্রচেষ্টা অব্যাহত রেখেছে। শিক্ষা হচ্ছে এই লক্ষ্য অর্জনের একটি শক্তিশালী হাতিয়ার। এজন্য শিক্ষার আধুনিকায়ন ছাড়া উপায় নেই। আর এই আধুনিকায়নের উদ্দেশ্যে একটি কার্যকর যুগোপযোগী শিক্ষাক্রম প্রণয়নের প্রয়োজনীয়তা দেখা দিয়েছে।

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ডের একটি নিয়মিত, কিন্তু খুবই গুরুত্বপূর্ণ কার্যক্রম হলো শিক্ষাক্রম উন্নয়ন ও পরিমার্জন। সর্বশেষ শিক্ষাক্রম পরিমার্জন করা হয় ২০১২ সালে। ইতোমধ্যে অনেক সময় পার হয়ে গিয়েছে। প্রয়োজনীয়তা দেখা দিয়েছে শিক্ষাক্রম পরিমার্জন ও উন্নয়নের। এই উদ্দেশ্যে শিক্ষার বর্তমান পরিস্থিতি বিশ্লেষণ এবং শিখন চাহিদা নিরূপণের জন্য ২০১৭ থেকে ২০১৯ সালব্যাপী এনসিটিবির আওতায় বিভিন্ন গবেষণা ও কারিগরি অনুশীলন পরিচালিত হয়। এসব গবেষণা ও কারিগরি অনুশীলনের ফলাফলের উপর ভিত্তি করে নতুন বিশ্ব পরিস্থিতিতে টিকে থাকার মতো যোগ্য প্রজন্ম গড়ে তুলতে প্রাক-প্রাথমিক থেকে দ্বাদশ শ্রেণির অবিচ্ছিন্ন যোগ্যতাভিত্তিক শিক্ষাক্রম উন্নয়ন করা হয়েছে।

যোগ্যতাভিত্তিক এ শিক্ষাক্রমের আলোকে সকল ধারার (সাধারণ, মাদ্রাসা ও কারিগরি) অষ্টম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের জন্য এই পাঠ্যপুস্তক প্রণয়ন করা হলো। বাস্তব অভিজ্ঞতার আলোকে পাঠ্যপুস্তকের বিষয়বস্তু এমনভাবে রচনা করা হয়েছে যেন তা অনেক বেশি সহজবোধ্য এবং আনন্দময় হয়। এর মাধ্যমে চারপাশে প্রতিনিয়ত ঘটে চলা বিভিন্ন প্রপঞ্চ ও ঘটনার সাথে পাঠ্যপুস্তকের একটি মেলবন্ধন তৈরি হবে।

পাঠ্যপুস্তকটি প্রণয়নে ধর্ম, বর্ণ, সুবিধাবঞ্চিত ও বিশেষ চাহিদাসম্পন্ন শিক্ষার্থীর বিষয়টি বিশেষভাবে বিবেচনায় নেওয়া হয়েছে। বানানের ক্ষেত্রে বাংলা একাডেমির বানানরীতি অনুসরণ করা হয়েছে। পাঠ্যপুস্তকটি রচনা, সম্পাদনা, চিত্রাঙ্কন ও প্রকাশনার কাজে যাঁরা মেধা ও শ্রম দিয়েছেন তাঁদের সবাইকে ধন্যবাদ জ্ঞাপন করছি।

পরীক্ষামূলক এই সংস্করণের কোনো ভুল বা অসংগতি কারো চোখে পড়লে এবং এর মান উন্নয়নের লক্ষ্যে কোনো পরামর্শ থাকলে তা জানানোর জন্য সকলের প্রতি বিনীত অনুরোধ রইল।

প্রফেসর মোঃ ফরহাদুল ইসলাম
চেয়ারম্যান
জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

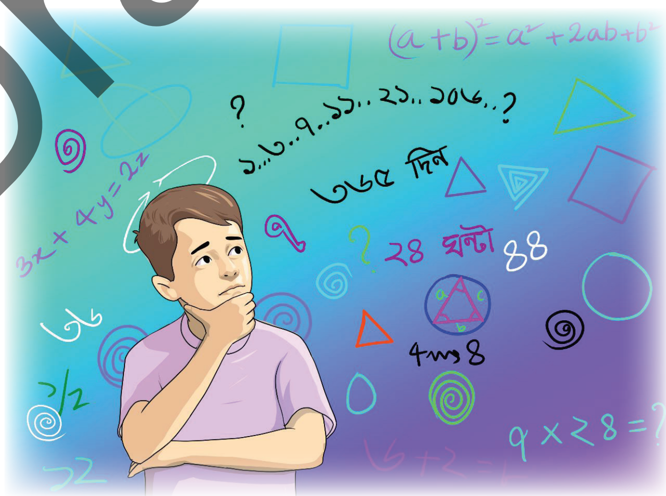
প্রিয় শিক্ষার্থী

তোমরা জানো "জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ" মাধ্যমিক স্তরের সকল শিক্ষার্থীর জন্য শিক্ষাক্রম অনুসারে পাঠ্যপুস্তক তৈরি করছে। নতুন পাঠ্যপুস্তকে তোমাদের গণিত শেখার পদ্ধতিতে আনা হয়েছে আমূল পরিবর্তন। তোমাদের জন্য এই বইটি তৈরি করার সময় যে বিষয়গুলোর উপর গুরুত্ব দেওয়া হয়েছে তা হলো- শিক্ষার্থীদের জন্য চারপাশের পরিচিত পরিবেশের বস্তু ও ঘটনা পর্যবেক্ষণ করে হাতে কলমে কাজের মাধ্যমে গাণিতিক সমস্যা সমাধান করার সুযোগ তৈরি করা এবং দৈনন্দিন জীবনে গাণিতিক দক্ষতা ব্যবহার করতে পারার পথ দেখিয়ে দেওয়া। গণিতের আনন্দময় পৃথিবীকে আবিষ্কার করার এই যাত্রায় শিক্ষক তোমাদের সব ধরনের সহায়তা করবেন।

অষ্টম শ্রেণির এই বইটিতে তোমাদের জন্য মোট দশটি শিখন অভিজ্ঞতা পরিকল্পনা করা হয়েছে। বাস্তব জীবনের সাথে সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যাকে গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করে সমাধান খোঁজার মধ্য দিয়ে এই অভিজ্ঞতাগুলোতে তোমরা অংশগ্রহণ করবে। প্রতিটি শিখন অভিজ্ঞতা এমনভাবে বিভিন্ন ধাপে উপস্থাপন করা হয়েছে, যেন তোমরা সক্রিয় অংশগ্রহণ ও বাস্তব উপকরণ ব্যবহারের মাধ্যমে গাণিতিক ধারণা ও দক্ষতাগুলো আয়ত্ত করতে পার। অভিজ্ঞতাগুলো এমনভাবে নির্মাণ করা হয়েছে যে প্রতিটি অভিজ্ঞতাতেই প্রয়োজনীয় অংশ জেনে নেওয়ার পর একক কাজ, দলগত কাজ এবং প্রকল্পে অংশগ্রহণের মাধ্যমে নিজেদের জানাটুকু খতিয়ে দেখতে পারবে। গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে গণিত শিখনের এই যাত্রা তোমাদের জন্য যেমন আনন্দদায়ক হবে তেমনি বাস্তব জীবনের সঙ্গে গণিতের ধারণাগুলোর সম্পর্ক তোমরা নিজেরাই খুঁজে পাবে। আর এই শিখন প্রক্রিয়ায় পাঠ্যপুস্তকটি তোমাদের জন্য সহায়ক উপকরণ হিসেবে কাজ করবে।

শ্রেণিকক্ষের ভিতরে এবং বাইরে সকল কাজে তোমাদের শিক্ষক সার্বিক সহায়তা প্রদান করবেন। আমরা আরও আশা করছি যে, তোমরা এই শিখন কার্যক্রমের বিভিন্ন কাজে অংশগ্রহণের সময় একে অপরের প্রতি সহায়ক ভূমিকা পালন করবে এবং সহপাঠীদের সাথে নিয়ে গণিতের আনন্দ উপভোগ করবে। তোমরা সবসময় মনে রাখবে যে আমাদের সকলের মধ্যে যখন সহযোগিতাপূর্ণ মনোভাব থাকে তখন যেকোনো কাজ আমরা সফলতার সাথে সম্পন্ন করতে পারি। আমরা আশা করছি গণিতের জগতে তোমাদের জন্য একটি কার্যকরী ও আনন্দময় শিখন অভিযাত্রা নিশ্চিত করতে এই বইটি গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রাখবে।

তোমাদের সকলের জন্য শুভকামনা।



সূচিপত্র

গাণিতিক অনুসন্ধান

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে

- গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া
- গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপসমূহ
- প্যাটার্ন
- তথ্যের উৎসের নির্ভরযোগ্যতা যাচাই করার পদ্ধতি

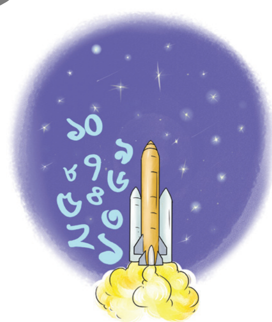
গাণিতিক অনুসন্ধান

আগের শ্রেণিগুলোতে তোমরা সংখ্যা ও সংখ্যার বৈশিষ্ট্য নিয়ে নিশ্চয়ই কিছু মজার তথ্য জেনে এসেছ। কিন্তু আজ আমরা সংখ্যা নিয়ে নতুন কিছু শিখব না। আজ শিখব সংখ্যা নিয়ে কীভাবে অনুসন্ধান করতে হয়। আগের শ্রেণিতে তথ্য ও উপাত্তের অভিজ্ঞতাটিতে বিভিন্ন বিষয়ের উপর সংখ্যাবাচক তথ্য সংগ্রহ ও বিশ্লেষণ করে কিছু সিদ্ধান্ত নিয়েছিলে, মনে আছে? আমাদের চারপাশে এমন অগণিত সংখ্যা রয়েছে যেগুলো নিয়ে গণিতজ্ঞ এবং গবেষকগণ চিন্তা করেন। গণিতজ্ঞ ও গবেষকগণের মতো দেখো তো চেষ্টা করে ব্যাপারটি আনন্দের নাকি নীরস, তোমাদের কী মনে হয়? তাহলে চলো আমরা কোনো একটি সমস্যা গণিতজ্ঞ গবেষকগণের মতো পরীক্ষা করে দেখি।

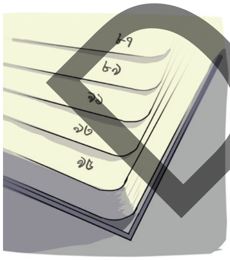
আজকে যে সমস্যাটি দেখব সেটি পৃথিবীর বড়ো বড়ো গণিতজ্ঞদের প্রিয় একটি সমস্যা এবং সেটির সঙ্গে ক্রমিক সংখ্যার অনুক্রমের সম্পর্ক আছে। সম্পর্কটি/সম্পর্কগুলো কী, ঘাঁটাঘাঁটি শেষ করে তোমরা বলবে। আরও বলে রাখি, এই সমস্যাটি বিশ্লেষণ করে তুমি এমন কিছু আবিষ্কার করতে পার যা অন্য কেউ কখনো করতে পারেনি। পরীক্ষাটি করতে গিয়ে তুমি বেশ কিছু হিসাব-নিকাশ এবং লেখালেখি করবে। কাজ শেষ হলে তুমি দেখে অবাক হয়ে যাবে যে গণিত নিয়ে অনুসন্ধান করতে গিয়ে কত চমৎকার একটি রাস্তা পাড়ি দিয়েছ, কত কিছু শিখেছ! তাহলে চলো, ধাপে ধাপে সমস্যাটি দেখা যাক।

তার আগে একটু মনে করে নেওয়া যাক যে ক্রমিক সংখ্যার অনুক্রম কী। একের পর এক ধারাবাহিকভাবে আসতে থাকে এমন সংখ্যা খেয়াল করেছ কখনো? যেমন, ১, ২, ৩,... -ইত্যাদি?

অথবা, টিভিতে কখনো দেখেছ রকেট বা মহাকাশযান উৎক্ষেপণের সময় নিচের দিকে গুনতে থাকে। যেমন: ১০, ৯, ৮, ৭...? ইংরেজিতে একে বলে কাউন্ট ডাউন।



"চলো আকাশপানে"



আবার ছোটো থেকে বড়ো হয় এমন সংখ্যার ক্রমও আমাদের সামনে আছে। চিন্তা করে দেখো, বইয়ের পৃষ্ঠা একের পর এক উল্টাতে থাকলে পৃষ্ঠা নম্বর বাড়তে থাকে, তাই না?

আমরা একে বলছি ক্রমিক সংখ্যার অনুক্রম। আসলে এ আর কিছুই নয়, বিভিন্ন পূর্ণ সংখ্যা একের পর এক বসলে যা হয় তাই।

এবার মূল সমস্যায় যাওয়া যাক, প্রস্তুত খাতা-কলম নিয়ে?

১ সমস্যাটির শুরু সংখ্যা দিয়ে। যে কোনো চারটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নাও এবং সংখ্যাগুলোকে ক্রমানুসারে সাজিয়ে পাশাপাশি বসাও। এবং তাদের মাঝখানে বেশ খানিকটা ফাঁকা জায়গা রাখো। তুমি যে কোনো চারটি সংখ্যা নিতে পার, বোঝার সুবিধার জন্য আমরা নিচের চারটি সংখ্যা নিলাম।

৪ ৫ ৬ ৭

২ এখন তোমার কাজ হলো সংখ্যাগুলোর মধ্যে যোগ (+) অথবা বিয়োগ (–) চিহ্ন বসানো। সংখ্যাগুলোর ক্রম ভঙ্গ না করে বিভিন্ন রকম ভাবে + অথবা – চিহ্ন বসাও। খানিকটা এমন–

৪ + ৫ – ৬ + ৭

৪ – ৫ + ৬ + ৭

৩ **অনুমান করে বলো দেখি**

- কত ভাবে সংখ্যাগুলোর মধ্যে যোগ অথবা বিয়োগ চিহ্ন বসানো যায়?
- পাশের ফাঁকা ঘরে লিখতে পার। $\boxed{}$

এবার + অথবা – যত রকম করে বসানো যায় সব রকম বসাও।

মাথায় যা এসেছে সব বসিয়েছ?

সব কটিই + এবং সব কটিই – , এমন করে বসিয়ে দেখেছ?

৪ এর পরের কাজ হলো সব কটির ফলাফল বের করা। যোগ বিয়োগ করে ঝটপট ফলাফল বের করে নাও। উদাহরণস্বরূপ–

৪ – ৫ + ৬ + ৭ = ১২

৫

অনুমান করে বলো দেখি

- ফলাফলগুলোর মধ্যে সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন সংখ্যা কী কী হতে পারে?
- ফলাফলগুলোকে ছোটো থেকে বড়ো সাজালে তাদের মধ্যে কি কোনো সম্পর্ক পাওয়া যেতে পারে?

৬ ফলাফলগুলোর মধ্যে বিশেষ কোনো অনুক্রম দেখতে পাচ্ছ অথবা কোনো সম্পর্ক খেয়াল করেছ?

মজার কোনো অনুক্রম লক্ষ করলে অথবা কোনো সম্পর্ক খেয়াল করলে সেগুলো তুমি খাতায় কোথাও টুকে রাখতে পার। তোমার চিন্তাভাবনার সুবিধার জন্য নিচের পরীক্ষাটি করো।

৭

পরীক্ষা করে দেখো

[তোমার বুদ্ধির ধার বাড়ানোর জন্য চারটি প্রশ্ন দেওয়া হলো। তোমার মাথায় আরও প্রশ্ন এলে নিচে এবং পরের পৃষ্ঠায় লিখে রাখতে পার]

১। ফলাফলগুলোকে ক্রমানুসারে সাজালে তাদের মধ্যে পার্থক্য (difference) কি একই থাকবে?

২। কোনো ফলাফল কি ০ (শূন্য) হতে পারে?

৩। কোনো ফলাফলের পুনরাবৃত্তি হতে পারে?

৪। + অথবা – চিহ্নের সংখ্যার উপর কি ফলাফলের ছোটো বা বড়ো হওয়ার সম্ভাবনা নির্ভর করে?

৫।

৬।

৮ তোমার খুঁজে পাওয়া সবচেয়ে মজার ছয়টি বৈশিষ্ট্য নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো। সেই সঙ্গে এমনটি হওয়ার কারণ কী হতে পারে বলে তুমি মনে করো তাও লিখে রাখো।

পুরো পরীক্ষাটি করতে গিয়ে তোমার কোনো ভুল হয়েছে? কখনো পুনরায় গণনা করতে হয়েছে? বা আগের ধাপে ফেরত যেতে হয়েছে? এমন কিছু হয়ে থাকলে নিচের ফাঁকা ঘরে লিখে রাখতে পার।

একক কাজ

তোমার চর্চার জন্য একই রকম আরও কিছু প্রশ্ন নিচে দেওয়া হলো। এমন সব প্রশ্নের উত্তর খুঁজতে চেষ্টা করা তোমার বুদ্ধির বিকাশের জন্য ভালো। উপরের পর্যবেক্ষণটির পদ্ধতিতেই নিচের পরীক্ষাগুলো সম্পাদন করে দেখ–

- সংখ্যাগুলো ছোটো থেকে বড়ো ক্রমে না সাজিয়ে যদি বড়ো থেকে ছোটো ক্রমে সাজাই, তাহলে ফলাফল কী আসে?
- চারটির বদলে যদি তিনটি ক্রমিক সংখ্যা নাও।
- চারটির বেশি ক্রমিক সংখ্যা নিয়ে কাজ করে দেখো।
- ভিন্ন অন্য কোনো চারটি সংখ্যা নিয়ে কাজ করে দেখো। আগেরবারের সংখ্যাগুলোতে যে ফলাফলের ধারা লক্ষ করেছ, এবারের সঙ্গে তার কোনো মিল আছে? কোনো পার্থক্য আছে?

গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া

সংখ্যা নিয়ে উপরের পরীক্ষা-নিরীক্ষা বা অনুসন্ধানটি ভালো লেগেছে? এ তো গেল সংখ্যা নিয়ে একটিমাত্র সমস্যা। সংখ্যা ছাড়াও গণিতের আরও অনেক শাখা রয়েছে, সেসব শাখায় বিভিন্ন রকমের প্রশ্ন এবং সমস্যা আছে। সেগুলো আমাদের দৈনন্দিন জীবনের সঙ্গেই যুক্ত। গাণিতিক কোনো সমস্যার বৈশিষ্ট্য, সমাধান বা প্রশ্নের উত্তর খুঁজে বের করার প্রক্রিয়াকে আমরা **গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়া** বলতে পারি। গণিত ছাড়াও অন্যসব বিষয়েরও অনুসন্ধান রয়েছে। যেমন, বিজ্ঞানের অনেক অনুসন্ধান ল্যাবরেটরিতে করে। আবার সামাজিক বিজ্ঞানের অনুসন্ধানের জন্য সামাজিক বিভিন্ন প্রতিষ্ঠানে যাওয়া লাগতে পারে। কিন্তু গণিতের মজা হলো, গাণিতিক অনুসন্ধানের অনেকটাই তুমি ঘরে বসে খাতা-কলমে করে ফেলতে পারবে। কখনো কখনো ক্যালকুলেটর বা কম্পিউটার লাগতে পারে। কিন্তু হাতে-কলমে গাণিতিক অনুসন্ধান করার থেকে আনন্দের আর কী আছে?

গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপ

আগেই বলেছি, এই অভিজ্ঞতায় আমরা গণিত শিখব না, গাণিতিক অনুসন্ধান কীভাবে করে তার পদ্ধতি শিখব। তোমরা ইতোমধ্যেই একটি অনুসন্ধান সম্পন্ন করেছ, আশা করি মজা পেয়েছ। এখন একটু ফিরে দেখা দরকার যে আমরা আসলে কী পদ্ধতি অবলম্বন করলাম, কী কী ধাপে কাজটি শেষ করলাম। আমাদের গাণিতিক অনুসন্ধানে যা যা কাজ করেছি, নিচের ছকে সেগুলো এলোমেলো করে দেওয়া আছে (ক-ঝ) । তোমার কাজ হবে ধাপগুলোর বাম পাশের ফাঁকা ঘরে কোনটি তোমার ক্ষেত্রে কততম ধাপ, তা লেখা। কোনো ধাপ যদি প্রয়োজন না পড়ে, তবে তার ঘর ফাঁকা রাখতে পার।

ক. সম্ভাব্য ফলাফল অনুমান করেছি

খ. সমস্যাটি বিশ্লেষণ করে বুঝে নিয়েছি

গ. অনুমানের সঙ্গে ফলাফল মিলেছে কি না, পরীক্ষা করতে গিয়ে ধরা পড়েছে

ঘ. যা করছি, ঠিক করছি কি না যাচাই করেছি

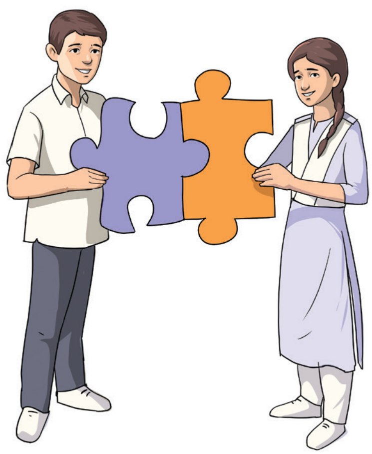
ঙ. সমস্যা/প্রশ্ন চিহ্নিত করেছি

চ. ফলাফল বিশ্লেষণ করেছি

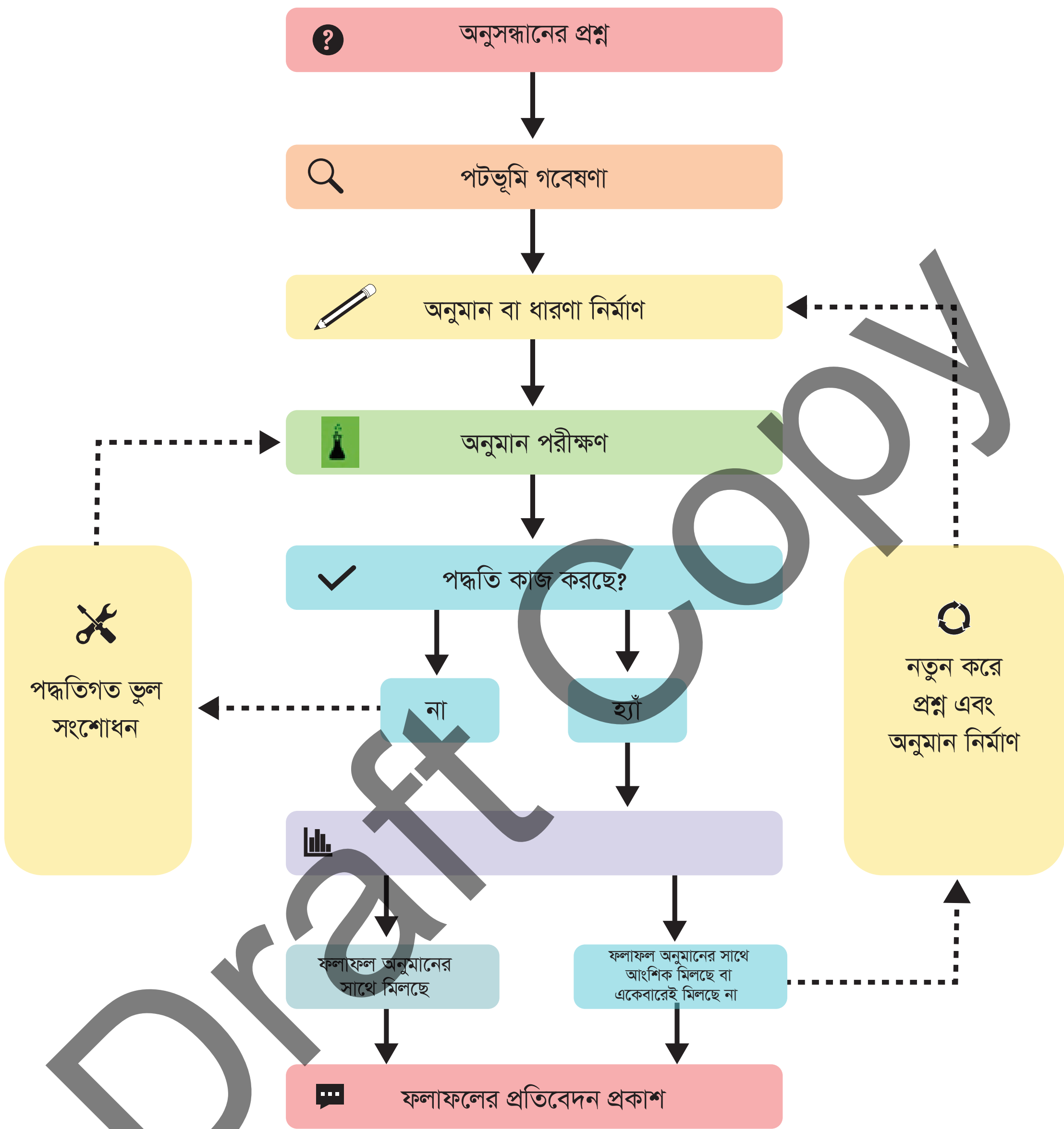
ছ. ভুল করলে আগের ধাপে ফেরত গিয়েছি

জ. কী পর্যবেক্ষণ করলাম, তা লিখেছি

ঝ. অনুমানগুলো পরীক্ষা করে দেখেছি



এখন খেয়াল করে দেখ, যে সব ধাপ চিহ্নিত করলে, সেগুলো যদি এলোমেলো অবস্থাতেই সম্পন্ন করতে, তোমার অনুসন্ধানে কি আশানুরূপ ফলাফল পেতে? প্রশ্নগুলোর উত্তর পেতে? নিশ্চয়ই না! তার অর্থ দাঁড়ায় গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপের একটি নির্দিষ্ট ক্রম আছে। সব অনুসন্ধানের পদ্ধতিগত ধাপগুলো একই হবে না, কিন্তু প্রত্যেকটি অনুসন্ধান প্রক্রিয়ার একটি সাধারণ ক্রম থাকা উচিত। গণিতবিদ বা বিজ্ঞানীগণ তাঁদের বিভিন্ন অনুসন্ধানের ক্ষেত্রে যে অনুসন্ধান প্রক্রিয়াটি ব্যবহার করে থাকেন, তা একটি ছকের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। নিচে তার একটি ছক দেওয়া আছে। তোমরা এটিকে গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়ার ফ্লো-চার্টও বলতে পার। ছকটির সঙ্গে তোমার করা গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপগুলোর কী কী মিল বা অমিল সেটি তোমার একজন সহপাঠীর সঙ্গে বসে মিলিয়ে নাও।

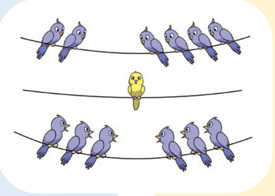


গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়ার ধাপের ফ্লো-চার্ট

জোড়ায় কাজ

আগের পৃষ্ঠায় পাওয়া গাণিতিক অনুসন্ধান প্রক্রিয়ার ধাপের ফ্লো-চার্টের সঙ্গে তোমাদের করা অনুসন্ধানটির নিশ্চয়ই কিছু মিল বা অমিল রয়েছে। তোমার বন্ধুর সঙ্গে আলোচনা করে নিচের ছক দুটিতে কী কী মিল বা অমিল পেলে, সেগুলো লিখে ফেলো :

মিল	অমিল



খেয়াল করো, নিচের ছকে ফ্লো-চার্ট থেকে পাওয়া অনুসন্ধানের বিভিন্ন ধাপ দেওয়া আছে। তোমার করা অনুসন্ধানের সময় ফ্লো-চার্টে উল্লেখ করা ধাপগুলোর নিশ্চয়ই কিছু কিছু মিল পেয়েছ। কোন ধাপে নির্দিষ্টভাবে কী করেছ সেটি নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো। তোমার জন্য একটি করে দেওয়া হলো:

ধাপ	কাজ
সমস্যা চিহ্নিতকরণ	চারটি ক্রমিক সংখ্যার মধ্যে বিভিন্নভাবে যোগ এবং বিয়োগ চিহ্ন বসালে ফলাফলের কী কী বৈশিষ্ট্য দেখা যায়?
অনুমান গ্রহণ	
পরীক্ষণ	
ভুল চিহ্নিতকরণ	
ফলাফল বিশ্লেষণ	

গাণিতিক অনুসন্ধান করা জরুরি কেন?

এ পর্যন্ত আমরা গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপগুলো জানলাম, কোনটি কীভাবে করে তা হাতে-কলমে দেখলাম। কিন্তু তোমার কি জানতে ইচ্ছা করছে যে এই অনুসন্ধান করে কী হবে? কেন গণিতবিদ এবং বিজ্ঞানীগণ অনুসন্ধান করে থাকেন? প্রশ্নের উত্তর পাওয়ার জন্য তো বটেই, কিন্তু কী হবে সে সব প্রশ্নের উত্তর জেনে? তোমার মাথায় কী আসছে নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো তো, ইচ্ছে হলে পাশে ছবিও এঁকে রাখতে পার।

কেন অনুসন্ধান করতে হবে, তার অনেক রকম কারণ থাকতে পারে। তবে প্রধানতম কারণটি হলো সমস্যাটির বৈশিষ্ট্যগুলোকেই গভীরভাবে বুঝতে চেষ্টা করা। সব সমস্যারই যে সমাধান সঙ্গে সঙ্গে করে ফেলা সম্ভব তেমনটি সব সময় নয়। তবে সমস্যাটিকেই যদি আগের থেকে আরেকটু ভালো বোঝা যায়, তবে তা সমাধানের দিকে অনেকটা এগিয়ে যায়।

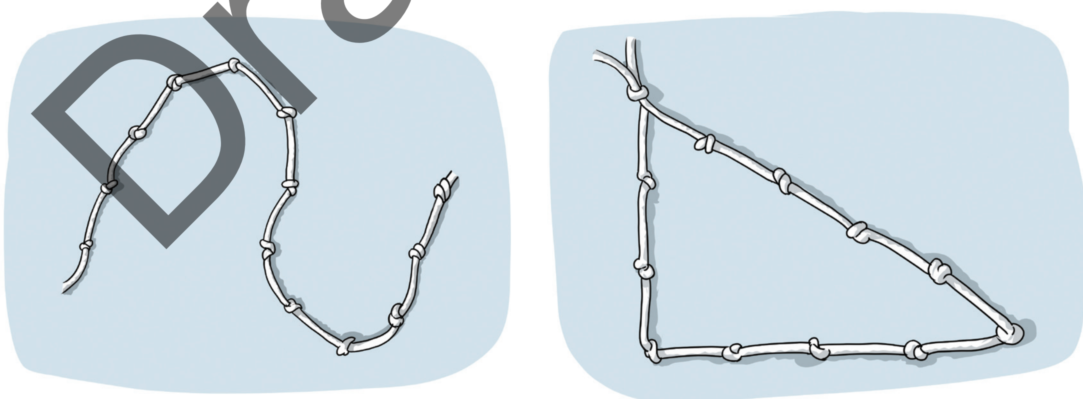
এই যে সমস্যার বৈশিষ্ট্য বোঝার কথা বললাম, এর মাধ্যমে কিন্তু আমরা সমজাতীয় সমস্যার সমাধান কীভাবে করব তাও বুঝতে পারি। আগের শ্রেণিতে তোমরা কিছু কিছু বীজগাণিতিক সূত্র ব্যবহার করা শিখে এসেছ। একই সূত্র দিয়ে সমজাতীয় অনেক গাণিতিক সমস্যার সমাধান করা যায়, তাই না?

দলগত অনুসন্ধান

এ পর্যন্ত তোমরা জেনে এসেছ গাণিতিক অনুসন্ধান কী, এই অনুসন্ধান কীভাবে সম্পন্ন করে, এর ধাপগুলো কী কী। কিন্তু ভবিষ্যতে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাবলি একই পদ্ধতিতে সমাধান করার জন্য আমাদের এখন থেকেই চর্চা থাকা প্রয়োজন। তাই আমরা এবার কিছু দলগত কাজ করব। তোমাদের পুরো ক্লাসটিকে শিক্ষক ছয়টি ভাগে ভাগ করবেন, প্রতিটি ভাগ একটি দল। নিচে তিনটি দলের জন্য একটি করে সমস্যা বা প্রশ্ন দেওয়া আছে, বাকি তিনটি সমস্যা শিক্ষক সরবরাহ করবেন। দলগুলোর সেগুলো অনুসন্ধান করে সমাধান/পর্যবেক্ষণ উপস্থাপন করতে হবে। কোন দলের ভাগে কোন সমস্যাটি পড়বে তা শিক্ষকের নির্দেশনায় লটারি করে নির্ধারণ করা হবে। উপস্থাপনের ক্ষেত্রে পোস্টার কাগজ ব্যবহার করলে ভালো, যদি না পার তবে শিক্ষকের পরামর্শে গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপ অনুসারে তোমাদের পর্যবেক্ষণ ব্যাখ্যা করবে। তোমাদের জন্য ৩টি সমস্যা দেওয়া হলো। শিক্ষকের সহায়তায় তোমরা আরও দুই বা তিনটি অনুসন্ধানের সমস্যা তৈরি করবে এবং এই অভিজ্ঞতার সঙ্গে সংযুক্ত করে রাখবে। তাহলে সমস্যা বা প্রশ্নগুলো দেখে নাও–

সমস্যা ১

প্রাচীন মিশরীয়রা গণিত এবং বিজ্ঞানে ভীষণ উন্নতি করেছিলেন, জানো তো? তাঁরা বিভিন্ন জ্যামিতিক পরিমাপের জন্য একটি দড়ি ব্যবহার করতেন। দড়িটির বৈশিষ্ট্য হলো, তাতে নির্দিষ্ট সমান ব্যবধানে ১৩টি গিঁট দেওয়া থাকত (ঠিক নিচের বাম পাশের ছবিটির মতো করে)।



এই দড়ি দিয়ে তাঁরা সমকোণী ত্রিভুজ বানাতেন (উপরের ডান পাশের ছবিটির মতো করে)। তোমরা নিশ্চয়ই জানো সমকোণী ত্রিভুজ কোনগুলো? পরবর্তী একটি অভিজ্ঞতায় তোমরা সমকোণী ত্রিভুজের মজার কিছু ব্যবহার শিখবে।

তোমাদের দলের অনুসন্ধানটির জন্য সমান দূরত্বে ১৩টি গিঁট দেওয়া একটি দড়ি জোগাড় করো। এরপর–

১। খুঁজে বের করো কী কী প্রকার ত্রিভুজ তৈরি করতে পার। শর্ত হলো দড়িটির দুই প্রান্তে গিঁট থাকবে, ত্রিভুজের প্রতিটি কোণে একটি করে গিঁট থাকবে, এবং দুই প্রান্তের গিঁট মিলিত হবে।

২। এমন একটি দড়ি দিয়ে আর কী কী আকৃতি তৈরি করতে পার (যেমন– বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র ইত্যাদি)?

সমস্যা ২

নিচের ছকটিতে মোট ১৯৬টি ঘর রয়েছে (তবে নিজে গণনা করে নিশ্চিত হয়ে নেওয়া ভালো, আমরা ভুলও বলতে পারি)। ছকটির প্রতিটি সারির জন্য একটি করে সংখ্যা এবং প্রতিটি কলামের জন্য একটি করে বাংলা অক্ষর নির্ধারণ আছে। এই সংখ্যা এবং অক্ষর ধরে প্রতিটি ঘরের ঠিকানা বের করা যায়। যেমন– ২য় সারির ৩য় ঘরটির ঠিকানা হলো ২গ।

এই অনুসন্ধানটিতে তোমরা ছক-১.১ এর নির্দেশিত ঘরে মূলত ১ থেকে ১০ এর ঘরের নামতার ফলাফল লিখবে। যেমন– ২ × ১ = ২, নির্ধারিত ঘরে কেবল গুণফলটি লিখবে, অর্থাৎ ২। কিন্তু শর্ত হলো নামতার ফলাফলে যদি শতক বা দশকের ঘরের অঙ্কও থাকে সেটি বসাতে পারবে না, কেবল এককের ঘরের অঙ্কটি বসাবে। যেমন– ২ × ৫ = ১০, নির্ধারিত ঘরে কেবল ০ লিখবে।

	ক	খ	গ	ঘ	ঙ	চ	ছ	জ	ঝ	ঞ	ট	ঠ	ড	ঢ
১														
২			২গ											
৩														
৪														
৫														
৬														
৭														
৮														
৯														
১০														
১১														
১২														
১৩														
১৪														

ছক-১.১

এবার নিচের নির্দেশনাগুলো অনুসরণ করো

১। ৩গ ঘর থেকে ১ এর নামতার ফলাফল লেখা শুরু করো। অর্থাৎ, ৩গ-তে বসবে ১, ৩ঘ-তে ২, ৩ঙ-তে ৩...। এমন করে ১ × ১০ পর্যন্ত গুণফল লেখো, কিন্তু অবশ্যই শর্তটি মনে রাখবে।

২। ৪গ থেকে ২ এর নামতা, ৫গ থেকে ৩ এর......... এমন করে ১১গ থেকে ১০ এর নামতার ফলাফলগুলো লেখো।

৩। এবার পুরো ছকটা সম্পূর্ণ করার জন্য অঙ্কগুলোর চারপাশের ঘরগুলোতে শূন্য বসিয়ে দাও।

এখন পর্যবেক্ষণ করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও

ক. অঙ্কগুলোর মধ্যে কী বৈশিষ্ট্য দেখতে পাচ্ছ?

খ. কোনো পুনরাবৃত্তি দেখতে পাচ্ছ? কোনো পুনরাবৃত্তি যদি দেখতে পাও, সেটিকে/সেগুলোকে ভিতরে রেখে চারদিকে দাগ দিয়ে প্রকাশ করতে পারবে? পুনরাবৃত্তি কি কেবল একই দিকে ঘুরতে পারে, নাকি বিপরীতেও?

গ. ছকটির বৈশিষ্ট্য এমনই কেন হলো?

সমস্যা ৩

সংখ্যার গুণনীয়ক সম্পর্কে নিশ্চয়ই তোমাদের ধারণা রয়েছে? না থাকলেও মনে করিয়ে দিই– কোনো একটি সংখ্যার গুণনীয়ক হলো এমন আরেকটি সংখ্যা যে সংখ্যা দিয়ে ঐ সংখ্যাটিকে ভাগ করা যায়। যেমন–

৮ এর গুণনীয়কগুলো হলো–

১, ২, ৪ এবং ৮

এবার ৮কে বাদ দিয়ে এর গুণনীয়কগুলোকে যোগ করলে কী পাওয়া যায় দেখো :

১ + ২ + ৪ = ৭

একইভাবে, ১০ এর গুণনীয়কগুলো বের করো। ১০কে বাদ দিয়ে এর গুণনীয়কগুলোকে যোগ করলে কী পাওয়া যায়?

এবার এসো দেখি একইভাবে ১২ এর গুণনীয়কগুলোর যোগফল কত হয়।

১২ এর গুণনীয়কগুলো হলো–

১, ২, ৩, ৪, ৬ এবং ১২

তাহলে ১২ বাদ দিয়ে বাকি গুণনীয়কগুলো যোগ করলে যোগফল কত হয় দেখা যাক–

১ + ২ + ৩ + ৪ + ৬ = ১৬

খেয়াল করে দেখ, ৮ এবং ১০ এর গুণনীয়কগুলোর যোগফল যথাক্রমে ৮ এবং ১০ এর থেকে ছোটো। কিন্তু ১২ এর ক্ষেত্রে তা নয়। তাই ১২ হলো সমৃদ্ধ সংখ্যা (abundant number)।

তোমার অনুসন্ধানের কাজটি হলো–

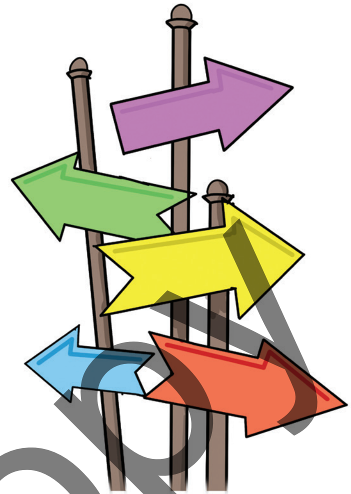
১। ৫টি সমৃদ্ধ সংখ্যা খুঁজে বের করো।

২। সমৃদ্ধ সংখ্যার বৈশিষ্ট্য কেন অন্যান্য সংখ্যার চেয়ে আলাদা?

৩। অন্য দলের সহপাঠীদের বোঝানোর জন্য সমৃদ্ধ সংখ্যার একটি সংজ্ঞা প্রস্তুত করো।

অনুসন্ধান উপস্থাপনের জন্য নির্দেশনা

তোমার দলের অনুসন্ধানটি কীভাবে করবে তার নির্দেশনা আগেই পেয়েছ। দলগতভাবে কাজটি হয়ে যাওয়ার পর কী করবে তার কিছু নির্দেশনা নিচে দেওয়া রইল, দেখে নাও।



১। প্রয়োজনীয় সংখ্যক পোস্টার কাগজে নিচের বিষয়গুলো লিখবে এবং ব্যাখ্যা করবে। প্রয়োজনে চিত্র, ছক বা ডায়াগ্রাম ব্যবহার করবে।

ক. তোমাদের দেওয়া অনুসন্ধানটি কী নিয়ে?

খ. কোন কোন প্রশ্নের উত্তর করলে তোমরা অনুসন্ধানটি সমাধান করতে পারবে?

গ. অনুসন্ধানটি সম্পাদন করার জন্য তোমাদের কী কী উপকরণ, জ্ঞান এবং দক্ষতা প্রয়োজন হয়েছে?

ঘ. অনুসন্ধানটি কী কী ধাপে সমাধান করেছ, তা একটি ফ্লো-চার্টের সাহায্যে উপস্থাপন করো। প্রয়োজনে এই অভিজ্ঞতার “গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপ” এর সাহায্য নিতে পার।

ঙ. অনুসন্ধানটির ফলাফল কী পেয়েছ?

চ. ফলাফল বিশ্লেষণ করে তোমরা নতুন কী কী শিখতে পারলে?

ছ. কোনো ধাপে কি কোনো ভুল করেছিলে? ভুল শুধরে নেওয়ার জন্য কি আগের কোনো ধাপে আবার ফেরত যেতে হয়েছে?

২। এবার শিক্ষকের নির্দেশনায় অপর একটি দলের সঙ্গে তোমাদের সমস্যাটি ব্যাখ্যা করো এবং তোমাদের পোস্টার বা প্রতিবেদনটি অদল-বদল করে নাও। তোমাদের অনুসন্ধানটি তারা বুঝতে পেরেছে নাকি খেয়াল করো। তাদের প্রশ্ন, পরামর্শ এবং মন্তব্যগুলো লিখে নাও। তাদের প্রশ্ন, পরামর্শ এবং মন্তব্যগুলো নিজেদের প্রতিবেদনে সংযোজন এবং পরিমার্জন করো।

৩। অপর যে দলের পোস্টার বা প্রতিবেদনটি পেয়েছ, সেটি বুঝতে পেরেছ কি না দেখ, তাদের প্রশ্ন করো এবং পরামর্শ দাও।

৪। এই অনুসন্ধানটিতে শিক্ষক বা বাবা-মা তোমাদের তেমন কোনো সাহায্য করবেন না, কেবল লক্ষ করবেন। সুতরাং, তোমাদের সমস্যার উত্তর নিজেদেরই নির্ণয় করতে হবে।

৫। যদি অর্থবহ হয় তবে উপস্থাপনার দিন বাস্তব বস্তুর সাহায্যে প্রদর্শন করো।

গাণিতিক অনুসন্ধান করে কী কী পাই?

তোমরা দলগতভাবে কিছু গাণিতিক অনুসন্ধানে অংশগ্রহণ করলে এবং অন্যান্য দলের অনুসন্ধানের ফলাফল দেখলে। কিন্তু তোমাদের মনে কি প্রশ্ন জেগেছে যে গাণিতিক অনুসন্ধান করে কী কী পাওয়া যায়? নিচে এই প্রশ্নের কিছু সম্ভাব্য উত্তর দেওয়া আছে। যে উত্তরগুলো তোমার পর্যবেক্ষণের সঙ্গে মিলে সেগুলোর বাম পাশের ঘরে টিক (√) চিহ্ন দাও। নিচের উত্তরগুলো ছাড়াও তোমার মাথায় আরও কিছু এলে ফাঁকা ঘরে লিখে রাখো।

- ☐ প্রশ্নের উত্তর পাওয়া যায়।
- ☐ সমস্যার সমাধান পাওয়া যায়।
- ☐ উত্তর বা সমাধান নির্ণয়ের পদ্ধতি আবিষ্কার করা যায়।
- ☐ একজাতীয় সমস্যার সমাধানের পদ্ধতি ঠিক করা যায়।
- ☐ জটিল কোনো বিষয়ের উপর সিদ্ধান্ত নেওয়া যায়।
- ☐ নতুন আরও সমস্যা তৈরি করা যায়।
- ☐ ভুল করার মাধ্যমে সঠিক পদ্ধতি খুঁজে পাওয়া যায়।
- ☐ নতুন গাণিতিক সম্পর্ক আবিষ্কার করা যায়।
- ☐ গাণিতিক সমস্যা সমাধান করার মাধ্যমে অন্য বিষয়ে সমস্যার সমাধান খুঁজে পাওয়া যায়।
- ☐ নিজের বুদ্ধিবৃত্তিক উন্নতি হয়।
- ☐ ____________________
- ☐ ____________________
- ☐ ____________________

[তুমি যে বক্তব্যগুলোর পাশে টিক চিহ্ন দিয়েছ, সেগুলোর একটি করে উদাহরণ দিতে পারবে?]

বৈশিষ্ট্যের পুনরাবৃত্তি থেকে প্যাটার্ন

আগের ছকটিতে খেয়াল করে দেখ, গাণিতিক অনুসন্ধানের মাধ্যমে একই জাতীয় সমস্যার সমাধান করা যায় বলা আছে। তুমি যদি এই বাক্যটির সঙ্গে একমত হও, তাহলে এটি নিয়ে একটু আলোচনা করা যায়। নিচের দুই লাইনে বিভিন্ন সংখ্যা সাজানো রয়েছে। পর্যবেক্ষণ করে বলো, সংখ্যাগুলো যত পদ পর্যন্ত সাজানো রয়েছে তুমি কি তার পরের পদটি নির্ণয় করতে পারবে?

ক. ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ...

খ. ১, ২, ৪, ৮, ১৬, ৩২, ...

কী পদ্ধতিতে নির্ণয় করলে?

প্রথম রাশিটির বৈশিষ্ট্য হলো : পরের পদ = আগের পদ + ১;

আর দ্বিতীয়টির ক্ষেত্রে : পরের পদ = আগের পদ x ২

তাহলে যে কোনো গাণিতিক রাশির বৈশিষ্ট্যটি যদি তুমি ধরে ফেলতে পার, তাহলে ঐ রাশি বিষয়ক যে কোনো সমস্যাই সমাধান করতে পারবে। এই বৈশিষ্ট্যটির পুনরাবৃত্তিকে আমরা প্যাটার্ন (Pattern) বলে থাকি। গাণিতিক অনুসন্ধানের অন্যতম একটি কাজ হলো কোনো গাণিতিক সমস্যার **বৈশিষ্ট্যের পুনরাবৃত্তি** বা **প্যাটার্ন** আবিষ্কার করা।

গাণিতিক অনুসন্ধান থেকে প্যাটার্ন আবিষ্কারের আরও একটি মজার উদাহরণ দেখা যাক।

আমাদের আগেও অনেক মনীষী ছিলেন যাঁরা অনুসন্ধান করে গণিতের সৌন্দর্য আবিষ্কার করেছিলেন। তাঁদের জ্ঞানের উপর ভর করেই আজ আমরা নিমেষের মধ্যে কঠিন কঠিন সমস্যার সমাধান করে ফেলতে পারি। তেমনই একজন হলেন যাঁর ছবি পাশে দেখতে পাচ্ছ। তিনি হলেন ১২শ শতকের বিখ্যাত ইতালীয় গণিতবিদ **ফিবোনাচ্চি** (Fibonacci)। তিনি প্রকৃতির মধ্যে অনুসন্ধান করে সংখ্যার একটি ধারা আবিষ্কার করেছিলেন বলে পরিচিত। ধারাটি প্রথম দেখায় খুবই সাধারণ বলে মনে হবে। কিন্তু মন দিয়ে দেখলে দেখবে তার মধ্যে একটি বিশেষ বৈশিষ্ট্যের পুনরাবৃত্তি বা প্যাটার্ন রয়েছে। সেটি কী তা তোমাকে খুঁজে বের করতে হবে। ধারাটি হলো:

ইতালীয় গণিতবিদ ফিবোনাচ্চি

০, ১, ১, ২, ৩, ৫, ৮, ১৩, ২১, ৩৪, ৫৫,...

তোমার জন্য প্রশ্ন হলো : ফিবোনাচ্চি অনুক্রমের ১২তম সংখ্যাটি কত?

এই ফাঁকা ঘরটি তোমার উত্তর নির্ণয়ের জন্য ব্যবহার করতে পার। তোমার উত্তর সম্পর্কে নিশ্চিত হতে পারলে ধারাটির মূল বৈশিষ্ট্যটি ব্যাখ্যা করে লিখে রাখতে পার।

একক কর্মপত্র

তুমি কি নিজের মতো করে কোনো সংখ্যার প্যাটার্ন এবং তার বৈশিষ্ট্য নির্ণয় তৈরি করতে পারবে? চেষ্টা করে দেখো এবং তোমার অনুসন্ধানের ফলাফল কর্মপত্রের মাধ্যমে শিক্ষকের কাছে জমা দাও।

কেন খুঁজব প্যাটার্ন?

ভাবছ যে প্যাটার্ন নিয়ে কথা বলার কী প্রয়োজন? তাহলে পাটিগণিত এবং বীজগণিতের দুটি খুব সাধারণ সমস্যার মধ্য দিয়ে প্যাটার্নের প্রয়োজনীয়তা বোঝার চেষ্টা করি, এসো। সমস্যা দুটি হলো :

১। ৫০ এর ৫% কত?

২। $(২ + b)^২$ =?

সমস্যা দুটি সমাধান করতে তোমাদের নিশ্চয়ই তেমন কোনো কষ্ট হয়নি। প্রথম সমস্যাটিতে ৫০ এর জায়গায় ৫০০ আর ৫% এর জায়গায় ২৫% থাকলেও তোমার সমাধানের পদ্ধতি একই হতো। আবার দ্বিতীয় সমস্যাটিতেও ২ এর জায়গায় a, আর b এর জায়গায় ২৯ হলেও একই পদ্ধতিতে সমাধান করতে।

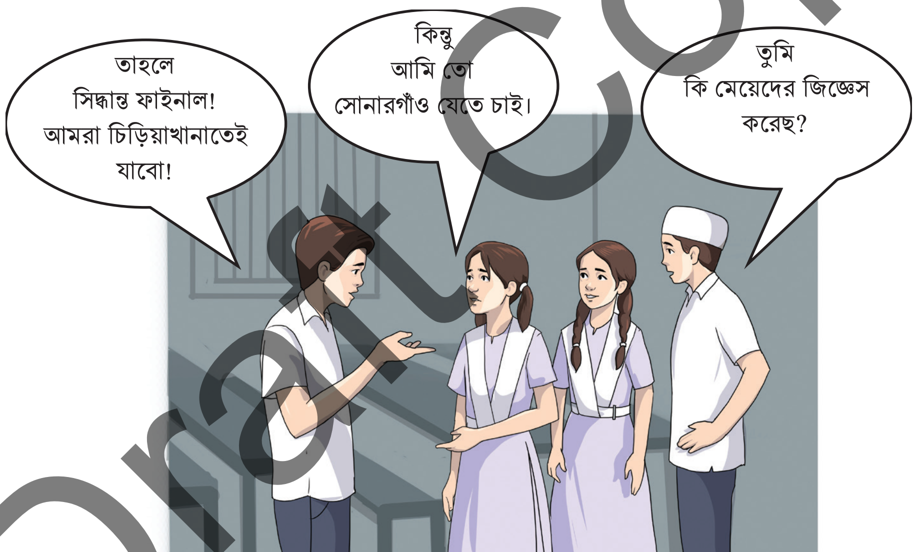
সুতরাং, একটি নির্দিষ্ট পদ্ধতি ব্যবহার করে একজাতীয়, বা একই বৈশিষ্ট্যের, বা একই ধারার সমস্যা সমাধান করা সম্ভব। তাই গাণিতিক অনুসন্ধান করার সময় আমাদের লক্ষ থাকে সমস্যাটির প্যাটার্নটি বোঝার। একই জাতীয় সমস্যা সমাধানের পদ্ধতিকে আমরা **সূত্র বা Formula** বলি। প্যাটার্ন আবিষ্কার করতে না পারলে আমরা সমস্যা সমাধানের সূত্র খুঁজে পাব না। এই শ্রেণিতে সামনের অভিজ্ঞতাগুলোতে তোমরা অনেক সমস্যা

পাবে যেগুলো নিয়ে চিন্তা করে মজা পাবে। সমস্যাগুলোকে যদি একেকটি গাণিতিক অনুসন্ধান হিসেবে দেখ, তবে সেগুলোর প্যাটার্ন বুঝতে পারলেই সমাধান করাটা খুব সহজ হয়ে যাবে।

গাণিতিক অনুসন্ধানে তথ্যের উৎস

আমরা এই অভিজ্ঞতায় গাণিতিক অনুসন্ধানের ধাপ এবং অনুসন্ধানের মাধ্যমে প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণের কথা বলেছি। কিন্তু বাস্তব জীবনে প্রতিটি গাণিতিক অনুসন্ধানেই তথ্য এবং উপাত্ত সংগ্রহ করা হয়ে থাকে। সেসব তথ্য বা উপাত্ত বিভিন্ন নির্ধারিত উৎস থেকে সংগ্রহ করা হয়। অনুসন্ধানের ক্ষেত্রে তথ্য বা উপাত্ত যতটা গুরুত্বপূর্ণ, তথ্যের উৎসও নির্ভরযোগ্য হওয়া একই রকম গুরুত্বপূর্ণ। একটি উদাহরণ দিলে বুঝতে সহজ হবে।

তোমাদের একটি ঘটনা বলি তাহলে সহজে বুঝতে পারবে। মনে করো তোমরা অষ্টম ‘জবা’ শাখার শিক্ষার্থী; তোমরা মোট ৪৫ জন ছেলেমেয়ে। তোমাদের বিদ্যালয়ের সব শ্রেণিতেই শিক্ষণীয় কোনো একটি জায়গায় ঘুরতে যাওয়ার পরিকল্পনা হচ্ছে। কিন্তু তোমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারছনা কোথায় যাবে। তোমাদের বন্ধু অনিক অষ্টম শ্রেণিতে ‘সূর্যমুখী’ শাখার বন্ধুদের নিকট থেকে জেনে এলো যে তারা চিড়িয়াখানায় ঘুরে এসেছে। অনিকের কাছ থেকে শুনে তোমাদের ক্লাসের ছেলেরা সিদ্ধান্ত নিয়ে ফেলল যে অষ্টম ‘জবা’ শাখার শিক্ষার্থীদেরও চিড়িয়াখানায় যাওয়া উচিত।



একটু চিন্তা করে বলো তো এই সিদ্ধান্ত গ্রহণের পদ্ধতির ভেতরে কোনো ভুল আছে কি না? যদি থাকে তাহলে কী কী লেখো।

তাহলে কি বুঝতে পারলে যে সঠিক/কার্যকরী সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য নির্ভরযোগ্য উৎস থেকে তথ্য বা উপাত্ত সংগ্রহ করা কত জরুরি? তুমি কি নিজের ভাষায় ব্যাখ্যা করতে পারবে তথ্য বা উপাত্ত সংগ্রহের জন্য নির্ভরযোগ্য উৎস ব্যবহার করা কেন প্রয়োজন?

এ তো গেল স্বল্প পরিসরে সংগৃহীত উৎস। একটু বড়ো পরিসরে তথ্যের উৎসের গুরুত্ব কতটা একটু দেখা যাক।

তোমাদের নিশ্চয়ই মনে আছে ২০২০ সালে কোভিড-১৯ মহামারিতে সারা পৃথিবীতে একটি ভয়াবহ বিপর্যয় শুরু হয়। সেই কঠিন সময়ে বিভিন্ন দেশের বিজ্ঞানীগণ অক্লান্ত পরিশ্রম করে সফলভাবে টিকা আবিষ্কার করে সারা পৃথিবীর মানুষকে মৃত্যুর হাত থেকে রক্ষা করেছিলেন। কিন্তু তোমরা কি জানো বিজ্ঞানীগণ কী পদ্ধতিতে টিকাগুলো আবিষ্কার করেছেন? তাঁরা কীভাবে পরীক্ষা করে দেখেছেন যে এই টিকা মানুষের জন্য কার্যকর?

যে কোনো টিকা তৈরি হলো একটি বৈজ্ঞানিক গবেষণার ফলাফল যা বিভিন্ন ধাপে সম্পন্ন করা হয়। এর মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ একটি ধাপ হলো তথ্য ও উপাত্ত সংগ্রহ করা এবং তা বিশ্লেষণ করে সিদ্ধান্তে পৌঁছানো। নির্দিষ্ট সংখ্যক মানুষ ও অন্যান্য প্রাণীর উপর কয়েকটি ধাপে টিকা প্রয়োগ করে গবেষকগণ তথ্য ও উপাত্ত সংগ্রহ করেন। তারপর সেগুলোর চুলচেরা বিশ্লেষণ শেষ হলে আমরা টিকাগুলো পাই।

এই তথ্য সংগ্রহের জন্য একটি নির্ভরযোগ্য উৎস খুঁজে বের করা অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ একটি কাজ। এখন মনে করো বিজ্ঞানীগণ তোমার এলাকার ১০০ জন মানুষকে টিকা দিলেন, আর বললেন যে সামনের মাসে এসে তাঁদের স্বাস্থ্য কেমন আছে, এ সম্পর্কিত তথ্য নিয়ে যাবেন। কিন্তু পরের মাসে ঐ ১০০ জনের মধ্যে ৬৫ জন অন্য এলাকায় চলে গেলেন। এখন বিজ্ঞানীগণ যদি তোমার এলাকার যে কোনো ১০০ জনের থেকে উপাত্ত সংগ্রহ করেন এবং তার ভিত্তিতে টিকা তৈরি করেন, তুমি কি সেই টিকা নিবে?

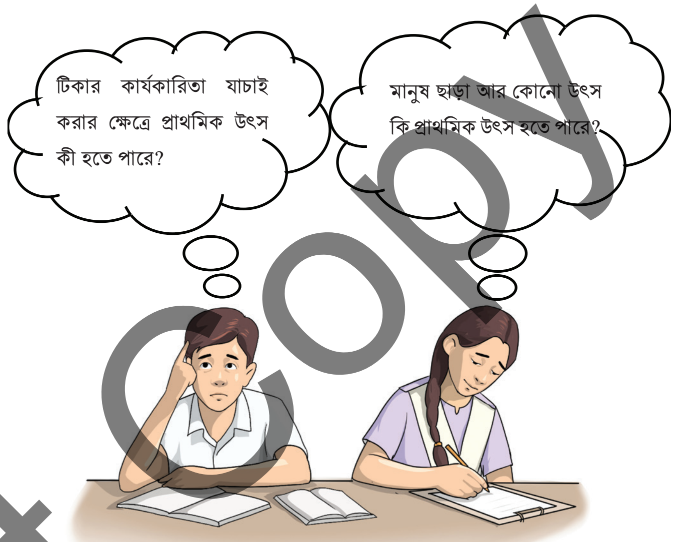
☐ হ্যাঁ ☐ না

কেন?

তার মানে গবেষণা বা অনুসন্ধানের তথ্য নির্ভরযোগ্য উৎস থেকে সংগ্রহ না করলে তার ফলাফল আমাদের কোনো কাজে আসে না। তাই না? কারণ উৎস যদি সঠিকভাবে নির্বাচন করা না হয় তাহলে তথ্য ও উপাত্ত সঠিক হবে না এবং প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তে পৌঁছানো যাবে না। টিকা তৈরির ক্ষেত্রেও বিজ্ঞানীগণ যদি সঠিক উৎস নির্বাচন করে তথ্য সংগ্রহ করতে না পারতেন, আমাদের পক্ষে কোভিড-১৯ মহামারি রোধে একটি কার্যকরী টিকা পাওয়া সম্ভব হতো না।

উৎসের নির্ভরযোগ্যতা যাচাই

তথ্যের উৎস দুই প্রকার: ক) মানবীয় উৎস এবং খ) জড় উৎস।



মানবীয় উৎস হলো যখন একজন মানুষ তোমাকে সরাসরি/প্রত্যক্ষভাবে তথ্য দিচ্ছে। অপরদিকে জড় উৎস হলো যখন তোমাকে সক্রিয়ভাবে পর্যবেক্ষণ করে তথ্য সংগ্রহ করতে হচ্ছে। আবার, বলা হয়ে থাকে অনুসন্ধানের জন্য যে উপাত্তগুলো সহপাঠী বা পরিবারের কাছ থেকে সরাসরি অর্থাৎ প্রত্যক্ষভাবে সংগ্রহ করেছ, সেগুলো প্রাথমিক উপাত্ত (primary data)। আর যে উপাত্তগুলো স্কুল রেকর্ড বা অন্য কোনো নির্ভরযোগ্য উৎস থেকে পরোক্ষভাবে সংগ্রহ করেছ, সেগুলো মাধ্যমিক উপাত্ত (secondary data)। আমরা এভাবেও বলতে পারি, যে উৎস থেকে আমরা প্রাথমিক উপাত্ত পাই সেগুলো প্রাথমিক উৎস। আবার যে উৎসগুলো প্রাথমিক উৎস থেকে প্রাপ্ত তথ্য রেকর্ড করে রাখে যেমন– কাগজপত্র, রিপোর্ট কিংবা দলিল প্রভৃতি সেগুলো হচ্ছে তথ্যের মাধ্যমিক উৎস।

নির্ভরযোগ্য তথ্যের উৎসের বৈশিষ্ট্যগুলো হলোঃ

- ☐ যে বিষয়ে তথ্য সংগ্রহ করা হচ্ছে ঐ বিষয়ের সঙ্গে উৎসটির প্রাসঙ্গিকতা (credibility)
- ☐ কাঙ্ক্ষিত তথ্যের ধরণ অনুযায়ী উৎসটির গ্রহণযোগ্যতা (acceptance)
- ☐ উৎসটির বিশ্বাসযোগ্যতা (trustworthiness)
- ☐ সংশ্লিষ্ট সকলকে উৎস হিসেবে বিবেচনা করা (representativeness)

এই যে বিভিন্ন ধরনের উৎস সম্পর্কে জানলে, তোমরা কি বলতে পারবে, কোন ধরনের উপাত্তের নির্ভরযোগ্যতা বেশি? নিশ্চয়ই প্রাথমিক উপাত্ত, তাই না? কারণ, প্রাথমিক উপাত্ত সরাসরি উৎস থেকে সংগ্রহ করা হয়। তাই ভুল বা বিকৃত হওয়ার সম্ভাবনা কম। অন্যদিকে, মাধ্যমিক উপাত্ত অনুসন্ধানকারী অনুসন্ধানের প্রয়োজনে কোনো পরোক্ষ উৎস থেকে সংগ্রহ করে থাকে। সে কারণেই উপাত্তের সঠিকতা যাচাই করার তেমন কোনো সুযোগ থাকে না। ফলে উপাত্ত ভুল বা বিকৃত থাকার সম্ভাবনা একেবারে উড়িয়ে দেওয়া যায় না। তাই মাধ্যমিক উপাত্তের নির্ভরযোগ্যতা প্রাথমিকের তুলনায়

অপেক্ষাকৃত কম। কিন্তু এর অর্থ এই নয় যে মাধ্যমিক উৎস থেকে প্রাপ্ত উপাত্তের গুরুত্ব কম। বরং অনেক ক্ষেত্রে প্রাথমিক উৎস থেকে তথ্য সংগ্রহ করা সম্ভব হয় না; সেক্ষেত্রে মাধ্যমিক উৎস আমাদের সাহায্য করে। যেমন– যখন সদ্যজাত শিশুদের রোগ নির্ণয় করার প্রয়োজন হয় তখন চিকিৎসক অভিভাবকের কাছে বিভিন্ন প্রশ্ন করে এবং শিশুটির অভিভাবক এখানে মাধ্যমিক উৎসের কাজ করে।

একটি উৎসের নির্ভরযোগ্যতা যাচাই করার জন্য কিছু বৈশিষ্ট্য দেওয়া আছে। যে কোনো উৎস নির্বাচনের ক্ষেত্রে তোমরা এই বৈশিষ্ট্যগুলো মিলিয়ে দেখবে।

এবার পরের সমস্যাটি জোড়ায় আলোচনা করে সমাধান করো।

জোড়ায় কাজ

সহপাঠীর সঙ্গে আলোচনা করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর খুঁজে বের করে লেখো।

নিচের বক্সে একটি টিকা তৈরির সময় বিজ্ঞানীগণ কোন উৎস থেকে তথ্য সংগ্রহ করেছিল তার একটি বর্ণনা দেওয়া আছে। তোমাদের কাজ হবে তথ্যের উৎসের ধরন ও বৈশিষ্ট্যগুলো শনাক্ত করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর খুঁজে বের করা।

টিকার কার্যকারিতা পরীক্ষার জন্য তথ্য সংগ্রহের প্রক্রিয়া

প্রথমে বিজ্ঞানীগণ বিজ্ঞানাগারে টিকাটি তৈরি করেন। এরপর ঐ টিকা বিভিন্ন দলের মানুষের উপর প্রয়োগ করে, তাদের কাছ থেকে টিকার কার্যকারিতা সম্পর্কে তথ্য সংগ্রহ করেন। টিকাটি তৈরি করার জন্য বিজ্ঞানীগণ ৩টি ধাপে পরীক্ষা-নিরীক্ষা করে তথ্য সংগ্রহ করেন। ২০২০ সালে জুলাই মাসে, টিকার তৃতীয় ধাপের পরীক্ষা (trial) পরিচালনা করা হয়। সারা বিশ্ব থেকে ৪৬,৩৩১ জন বিভিন্ন বয়সি মানুষ এ পরীক্ষায় অংশগ্রহণ করেন। তাদের সকলকে টিকা প্রদান করে, এর কার্যকারিতা পরীক্ষা করার জন্য বিজ্ঞানীগণ তথ্য সংগ্রহ করেন। প্রাপ্ত তথ্যগুলো ভালোমতো বিশ্লেষণ ও পরীক্ষার মাধ্যমে ঐ টীকা কার্যকর হিসেবে প্রমাণ পাওয়া যায়।

নানা বৈশিষ্ট্যের মানুষ এ পরীক্ষায় অংশগ্রহণ করেছিলো যাতে বিজ্ঞানীগণ নিশ্চিত করতে পারেন যে এই টিকাটি বিভিন্ন ধরনের মানুষের জন্য কার্যকরী। যেমন– এই পরীক্ষায় ৪৯.১% পুরুষ এবং ৫০.৯% নারী ছিলেন। এশিয়ান, আফ্রিকান, ল্যাটিন প্রভৃতি দলের মানুষ ছিলেন। এছাড়াও অংশগ্রহণকারীদের মধ্যে বিভিন্ন বয়সের মানুষের উপস্থিতি নিশ্চিত করা হয়েছিল। নিচের ছকে বয়স অনুযায়ী মানুষের সংখ্যা দেয়া হলো :

বয়স (বছর)	অংশগ্রহণকারীর সংখ্যা
১২-১৫	২,২৬০
১৬-১৭	৭৫৪
১৮-৫৫	২৫,৪২৭
৫৬+	১৭,৮৭৯

(ক) টিকা তৈরির জন্য কোন ধরনের উৎস থেকে বিজ্ঞানীগণ তথ্য সংগ্রহ করেছিলেন? কেন?

(খ) টিকা তৈরির জন্য যে উৎস ব্যবহার করা হয়েছিল তাদের সবার বৈশিষ্ট্য কি একই রকম ছিল? ভিন্নতা থাকলে তা বর্ণনা করো।

(গ) তথ্য সংগ্রহের উৎসের ক্ষেত্রে বয়সের ভিন্নতা থাকলে কী সুবিধা হয়েছে বলে তুমি মনে করো, লেখো।

(ঘ) এই টিকা তৈরির ক্ষেত্রে পৃথিবীর বিভিন্ন এলাকা থেকে বিভিন্ন জাতির মানুষের কাছ থেকে তথ্য সংগ্রহ করা হয়েছিল। এই কাজটি উপরের উৎসের নির্ভরযোগ্যতার কোন বৈশিষ্ট্যকে প্রকাশ করছে?

শেষ কথা

অভিজ্ঞতাটিতে তুমি গাণিতিক অনুসন্ধান বা সমস্যা সমাধানের ধাপ, অনুসন্ধানের মাধ্যমে প্যাটার্ন আবিষ্কার এবং অনুসন্ধানের জন্য প্রয়োজনীয় তথ্যের উৎসের নির্ভরযোগ্যতা যাচাইয়ের বিষয়ে অভিজ্ঞতা অর্জন করতে চেষ্টা করেছ। তার মধ্যে কিছু খুঁটিনাটি বিষয় রয়েছে যেগুলো হাতে-কলমে চর্চা করতে গেলে আরও পরিষ্কার হবে। আশা করা যায়, সামনের অভিজ্ঞতাগুলোতে তুমি অনুসন্ধানী দৃষ্টি দিয়ে সমস্যাগুলোকে বিশ্লেষণ এবং সমাধানের চেষ্টা করবে। এটি এই অভিজ্ঞতার জন্য শেষ কথা হলেও, তোমার গণিত শিক্ষার জন্য একটি নতুন আনুষ্ঠানিক যাত্রা শুরু হোক গাণিতিক অনুসন্ধান দিয়ে।

দৈনন্দিন কাজে বাস্তব সংখ্যা

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে

- বর্গসংখ্যার বর্গমূল এবং ঘনসংখ্যার ঘনমূল
- পূর্ণ সংখ্যার বর্গমূল ও ঘনমূল
- বর্গমূল ও ঘনমূলের গাণিতিক বৈশিষ্ট্য
- ভগ্নাংশের বর্গমূল
- বর্গমূল ও ঘনমূলের সরলীকরণ
- সংখ্যারেখায় বর্গমূল সংখ্যার অবস্থান
- ক্যালকুলেটরের মাধ্যমে বর্গমূল ও ঘনমূলের আসন্নমান
- বর্গমূল ও ঘনমূলের ব্যবহার

দৈনন্দিন কাজে বাস্তব সংখ্যা

প্রতিদিন নানা কাজে আমরা বিভিন্ন রকম সংখ্যা ব্যবহার করি। তোমার শ্রেণিতে বা শিক্ষা প্রতিষ্ঠানে কতজন শিক্ষার্থী আছে? শ্রেণিকক্ষে কতগুলো জানালা আছে? এই ধরনের গণনার সঙ্গে পূর্ণসংখ্যা সম্পর্কিত থাকে। আবার উচ্চতা, ওজন ইত্যাদি পরিমাপে অধিকাংশ ক্ষেত্রে ভগ্নাংশ বা দশমিক চলে আসে। কখনো অনেক বিশাল সংখ্যা হলে সূচকের মাধ্যমেও প্রকাশ করা হয়। তোমরা ভগ্নাংশ, দশমিক এবং সূচকের সঙ্গে আগেই পরিচিত আছ। যেমন, $\frac{১}{২}$, $\frac{২}{৩}$, $\frac{৫}{৪}$ ইত্যাদি ভগ্নাংশ আকার। আবার ০.২৫, ৩.৩৩, ৫.২৫৫৫...দশমিক আকার এবং $৪^{১০}$ সূচক আকার। এই ধরনের সংখ্যা মূলদ সংখ্যা। এছাড়া অসংখ্য অমূলদ সংখ্যাও রয়েছে। এ অভিজ্ঞতায় আমরা মূলদ সংখ্যা ছাড়াও অমূলদ সংখ্যার সঙ্গে পরিচিত হব। বাস্তব জীবনে ব্যবহৃত এই সকল সংখ্যাকে আমরা বাস্তব সংখ্যা (real number) বলি। এই শিখন অভিজ্ঞতায় আমরা বিভিন্ন রকম বাস্তব সংখ্যা ও তাদের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে জানব।

ভাগাভাগির খেলা

সংখ্যার ভাগ আমাদের দৈনন্দিন কাজের সঙ্গে ওতপ্রোতভাবে জড়িত। যেমন, ৬টি রুটি ২ জনে ভাগ করে খাওয়া, ১০০ টাকা ৫ জনে ভাগ করে নেওয়া, ২বিঘা জমি ৩ ভাই-বোনের মধ্যে ভাগ করা, ইত্যাদি। এসব ভাগের ক্ষেত্রে আমরা কখনো সহজেই করতে পারি আবার কখনো বেশ সমস্যায় পড়তে হয়। একটি অভিজ্ঞতার মাধ্যমে আমরা বিষয়টি বোঝার চেষ্টা করব। মনে করো, তোমরা বন্ধুরা মিলে টিফিনের সময় দোকান থেকে খাবার কিনে একসঙ্গে খাও এবং সমান ভাগে বিল পরিশোধ করো। বিভিন্ন দিনে বন্ধুদের সংখ্যা এবং খাবারের খরচ নিচে দেওয়া হলো। ছক ২.১ পূরণ করো।

ছক ২.১

বন্ধুদের সংখ্যা	খাবারের খরচ (টাকা)	প্রতিজনের খরচ (টাকা) ভগ্নাংশে	প্রতিজনের খরচ (টাকা) দশমিকে
২	২০		
৪	৪২	$\frac{৪২}{৪}$	
৪	৪১		
৫	৫৪		১০.৮০
৩	৩২		১০.৬৬৬৬ ...
৩	৪২		
৬	৫৫		
৭	৬০		

উপরের ছকটি পূরণ করতে গিয়ে তোমরা কী পর্যবেক্ষণ করলে তা নিচে লিখে রাখো।

সসীম এবং অসীম দশমিক সংখ্যা (Finite and Infinite Decimal Number)

ভাগাভাগির খেলাতে তোমরা হয়তো লক্ষ করেছ, ভগ্নাংশ থেকে দশমিকে রূপান্তর করার সময় কখনো পূর্ণসংখ্যা হয়েছে, কখনো দশমিক বিন্দুর পরে অঙ্ক শেষ হয়েছে, আবার কোনো কোনো ক্ষেত্রে দশমিক বিন্দুর পর অঙ্ক শেষই হচ্ছে না। যে সব সংখ্যায় দশমিক বিন্দুর পরে অঙ্ক শেষ হয়ে যায় তাকে **সসীম দশমিক সংখ্যা** বলে। যে সব সংখ্যায় দশমিক বিন্দুর পরে অঙ্ক শেষ হয় না, তাকে **অসীম দশমিক সংখ্যা** বলে। কোনো অসীম দশমিক সংখ্যার দশমিক প্রকাশে দশমিকের পরে এক বা একাধিক অঙ্কের পুনরাবৃত্তি হলে তাকে আবৃত্ত বা **পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশ** (recurring or repeating decimal) বলে। পৌনঃপুনিক দশমিকে অসীম পর্যন্ত লেখা সম্ভব নয়, তাই যে অংশের পুনরাবৃত্তি হচ্ছে তার উপরে “ ‒ ” বা “ ˙ ” দিয়ে প্রকাশ করা হয়। “ ‒ ” ব্যবহারের ক্ষেত্রে পুনরাবৃত্তি হওয়া সবকটি অঙ্কের উপর “ ‒ ” দেওয়া হয়। “ ˙ ” ব্যবহারের ক্ষেত্রে এক বা দুইটি অঙ্কের পুনরাবৃত্তি হলে প্রতিটি অঙ্কের উপরেই “ ˙ ” ব্যবহার করা হয়। তবে একাধিক অঙ্কের পুনরাবৃত্তির ক্ষেত্রে শুধু পুনরাবৃত্ত অঙ্কগুলোর প্রথম ও শেষ অঙ্কের উপর “ ˙ ” দেওয়া হয়। যেমন–

$৩৩.৩৩৩\ldots = ৩৩.\dot{৩} = ৩৩.\overline{৩}$,

$১.২৭২৭\ldots = ১.\overline{২৭} = ১.\dot{২}\dot{৭}$,

$০.৩৪৫৩৪৫\ldots = ০.\overline{৩৪৫} = ০.\dot{৩}৪\dot{৫}$

মূলদ সংখ্যা (Rational Number)

তোমরা হয়তো লক্ষ করেছ, ভগ্নাংশকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়। অর্থাৎ ভগ্নাংশ দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাত। যে সকল সংখ্যাকে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায়, শুধু তাদেরকেই আমরা মূলদ সংখ্যা বলি। ভগ্নাংশে লব ও হর থাকে। এখানে p লব এবং q হর। হরে ০ (শূন্য) হতে পারে না কারণ হর যদি ০ হয়, তাহলে শূন্য দিয়ে ভাগ করতে হয়। আর সেক্ষেত্রে তোমরা সংখ্যারেখায় ভাগের ধারণা ব্যবহার করে দেখতে পাবে সেই অনুপাতের মান অসংজ্ঞায়িত হয়ে যায়।

সুতরাং,

যে সকল সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে p, q পূর্ণসংখ্যা এবং ($q \neq 0$) তাদেরকেই শুধু আমরা **মূলদ সংখ্যা** (rational number) বলি।

একক কাজ

শূন্য (০) কি মূলদ সংখ্যা? মূলদ সংখ্যা হলে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করো।

যে কোনো পূর্ণসংখ্যা কি মূলদ সংখ্যা? মূলদ সংখ্যা হলে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করো।

সসীম দশমিক সংখ্যা কি মূলদ সংখ্যা? ০.২১ এবং ২.০১ সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করো।

এবার বলো তো, পৌনঃপুনিক দশমিক সংখ্যাকে কি ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা যায়? এসো চেষ্টা করে দেখি। এখানে আমরা অজানা রাশির একটুখানি ব্যবহার শিখব।

সমস্যা : ০.৩̇ = ০.৩৩৩...সংখ্যাটিকে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করো।

সমাধান : ধরি, ক = ০.৩৩৩...। তাহলে, ১০ক = ৩.৩৩৩... (উভয় পার্শ্বে ১০ দ্বারা গুণ করে)।

এখন, ১০ক থেকে ক বিয়োগ করে পাই,

$$\begin{aligned} ১০\,ক &= ৩.৩৩৩\ldots \\ ক &= ০.৩৩৩\ldots \\ \hline ৯ক &= ৩ \end{aligned}$$

অর্থাৎ

$$ক = \frac{৩}{৯} = \frac{১}{৩}$$

সুতরাং, ০.৩৩৩...= $\frac{১}{৩}$

শূন্য(০), সকল পূর্ণসংখ্যা, সসীম দশমিক সংখ্যা এবং পৌনঃপুনিক দশমিক সংখ্যা মূলদ সংখ্যা।

☞ এখানে একটি বিষয় লক্ষ রাখতে হবে যে, যেহেতু পূর্ণসংখ্যা ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক হতে পারে, সুতরাং মূলদ সংখ্যাও ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক হতে পারে।

একক কাজ

১. নিচের দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে সাধারণ ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করো :

$০.৬৬৬\ldots,\quad ০.৪৭৭৭\ldots,\quad ১.৯৯৯\ldots,\quad ১.\overline{২৭},\quad ০.২\overline{৩৫},\quad ৩.০\dot{৯},\quad ২.\dot{৩}\dot{৪},\quad ০.\dot{১}২৩\dot{৪}$

২. নিচের ভগ্নাংশগুলোকে দশমিক ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করে কোনো প্যাটার্ন খুঁজে পাও কি না বের করো। এরপর প্রতিক্ষেত্রে প্রাপ্ত দশমিক ভগ্নাংশকে উপরে দেখানো বিভিন্ন কৌশল বা সেগুলোর সমন্বয়ে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর করে যাচাই করো।

$\frac{২}{৩},\quad \frac{৬১}{৯০},\quad \frac{১২}{১৩},\quad ২\frac{৩৪}{৯৯}$

আসন্নমান (Approximate Value)

তোমরা তিন বন্ধু মিলে ১০০ টাকা সমান ভাগে ভাগ করে নিতে চাইছ। ভাগ করে দেখ, তুমি ক্লান্ত হয়ে যাবে কিন্তু ভাগ প্রক্রিয়া শেষ হবে না। এই ধরনের কাজ করার জন্য মানুষ নানারকম যন্ত্র আবিষ্কার করেছে। এই ধরনের যন্ত্র আমাদের নানা সমস্যায় সাহায্যকারী বন্ধুর মতো কাজ করে। নানারকম হিসাব-নিকাশের কষ্ট কমানোর জন্য মানুষ বিভিন্ন ধরনের ক্যালকুলেটর, কম্পিউটার বা অন্য কোনো ডিজিটাল ডিভাইস তৈরি করেছে। তোমার কাছে থাকা এরকম কোনো ডিজিটাল ডিভাইসের মাধ্যমে ১০০ কে ৩ দ্বারা ভাগ করো। **সবরকম গণনাযন্ত্র বা ডিজিটাল ডিভাইসে কি একই ভাগফল দেখতে পাচ্ছ?** নিশ্চয়ই না। আর ১০০কে ৩ দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল একটাই আসার কথা। তাহলে কোনটা ঠিক আর কোনটা ভুল? কোনো ডিভাইস কিন্তু “১০০ কে ৩ দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল” কে সাধারণ ভগ্নাংশ $\frac{১০০}{৩}$ আকারেই দেখায়। সেক্ষেত্রে সেটা ঠিকই আছে। কিন্তু ভাগ করতে গিয়ে তুমি দেখেছ যে $\frac{১০০}{৩}$ এর মানের ক্ষেত্রে দশমিক বিন্দুর পর অঙ্ক শেষই হচ্ছে না, বারবারই ৩ আসছে। কিন্তু ডিজিটাল ডিভাইসগুলো দশমিকের পর নির্দিষ্ট সংখ্যক অঙ্ক পর্যন্তই দেখাতে পারে। কোনো ডিজিটাল ডিভাইসই তাদের নির্দিষ্ট সীমার বাইরে সংখ্যা দেখাতে পারে না। তাই যখনই কোনো ডিজিটাল ডিভাইসে $\frac{১০০}{৩}$ এর মান দশমিক ভগ্নাংশে দেখানো হবে সেটা ওই নির্দিষ্ট সংখ্যক অঙ্ক পর্যন্তই দেখিয়ে শেষ হয়ে যাবে।

> তবে যদি ১০০ কে ৩-এর পরিবর্তে ১৬ দিয়ে ভাগ করা হতো তাহলে ভাগফল হতো $\frac{১০০}{১৬} = ৬.২৫$, এখানে দশমিক বিন্দুর পর মাত্র ২টি অঙ্ক আছে এরপর আর নেই, অর্থাৎ সংখ্যাটিতে দশমিক বিন্দুর পর অঙ্ক সংখ্যা শেষ হচ্ছে। এ ক্ষেত্রে ডিজিটাল ডিভাইসগুলোতেই ৬.২৫ অর্থাৎ, একেবারে সঠিক মানই দেখাত।

এবার মনে করো, কোনো ডিজিটাল ডিভাইস $\frac{১০০}{৩}$ এর মান দশমিক বিন্দুর পর ১ কোটি অঙ্ক পর্যন্ত দেখাতে পারে। তবুও কিন্তু সেটা সসীম দশমিক সংখ্যাই দেখাবে। আর সেটা কখনোই $\frac{১০০}{৩}$ এর সত্যিকারের মানের (৩৩.৩৩৩..., যা একটি অসীম দশমিক সংখ্যা) সমান হবে না। তারমানে কোনো ডিজিটাল ডিভাইস $\frac{১০০}{৩}$ এর কখনো সঠিক মান দিতে পারে না।

আচ্ছা, অসীম দশমিকের গণনার ক্ষেত্রে এই সীমাবদ্ধতার ব্যাপারটা বোঝার পর তুমি কি ডিজিটাল ডিভাইস নামের এই সাহায্যকারী বন্ধুদেরকে সবসময় ভরসা করবে? নাকি মোটেও ব্যবহার করবে না? তাহলে বিশাল বিশাল যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ করতেও অনেক কষ্ট হবে। কী করা যায় বলো তো?

আমরা শুরুতেই বলেছি ডিজিটাল ডিভাইসগুলো তোমার বন্ধুর মতো নানা কাজে সাহায্য করে। তবে তুমি নিজে ভেবে দেখবে যে কাজটা ঠিক হচ্ছে কি না। একইভাবে, ডিজিটাল ডিভাইসগুলোও সবক্ষেত্রে একেবারে সঠিক উত্তর দিতে পারে না, কাছাকাছি উত্তর দেয় যাকে আমরা **আসন্নমান (approximate value)** বলে থাকি। এটা ডিজিটাল ডিভাইসের সীমাবদ্ধতা।

সমতুল মূলদ সংখ্যা

আমরা পূর্বের শ্রেণিতে ধনাত্মক ভগ্নাংশের সমতুল্যতা নিয়ে আলোচনা করেছি। এখানে আমরা ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক উভয় ভগ্নাংশের সমতুল্যতা নিয়ে আলোচনা করব। চলো এবার নিচের মূলদ সংখ্যাগুলোর দিকে লক্ষ করি।

$$-\frac{৩}{৪}, \qquad -\frac{৬}{৮}, \qquad -\frac{৭৫}{১০০}, \qquad -০.৭৫$$

এই সংখ্যাগুলো কি আলাদা? সাধারণ ভগ্নাংশ আর দশমিক ভগ্নাংশের ধারণা ব্যবহার করে যাচাই করে দেখো তো। আমার জানা একটি বুদ্ধি আছে।

দুটি মূলদ সংখ্যা $\frac{a}{b}$ এবং $\frac{c}{d}$ সমান হবে, অর্থাৎ

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হবে, যদি $ad = bc$ হয়।

মূলদ সংখ্যার এই বৈশিষ্ট্যকে সমতুল্য বৈশিষ্ট্য বলে। নিশ্চয়ই বুঝতে পারছ যে, সংখ্যাগুলোর প্রতিটি একই সংখ্যাকে নির্দেশ করে। তারমানে এই সবকটি সংখ্যার মান সমান। অর্থাৎ,

$$-\frac{৩}{৪} = -\frac{৬}{৮} = -\frac{৭৫}{১০০} = -০.৭৫,$$

এই সংখ্যাগুলোর একটি অন্যটির সমতুল মূলদ সংখ্যা।

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

একক কাজ

সমতুল বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে নিচের সমান ভগ্নাংশগুলো নির্ণয় করো।

$\frac{২}{৩}$, $-\frac{৩}{২}$, $\frac{৬}{৯}$, $\frac{১৬}{২৪}$, $-\frac{১৫}{১০}$, $-\frac{৫}{১৫}$.

একটি মূলদ সংখ্যার অসংখ্য সমতুল মূলদ সংখ্যা পাওয়া যায়। লব ও হর উভয়কে ০ ব্যতীত অন্য যে কোনো সংখ্যা দিয়ে গুণ করে সমতুল মূলদ সংখ্যা পাওয়া যায়।

যেকোনো মূলদ সংখ্যা $\frac{a}{b}$ এর জন্য,

$$\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b} \; (x \neq 0)$$

এবং $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

এই বৈশিষ্ট্যকে মূলদ সংখ্যার মৌলিক বৈশিষ্ট্য বলে। সুতরাং, প্রতিটি মূলদ সংখ্যার অসীম সংখ্যক সমতুল মূলদ সংখ্যা আছে।

$$-\frac{৩}{৪}, -\frac{৬}{৮}, -\frac{৭৫}{১০০}, -০.৭৫, ---$$

এই সংখ্যা গুলোর আরেকটি বৈশিষ্ট্য হচ্ছে এগুলোর বামপাশে ঋণাত্মক চিহ্ন (—) আছে। তার মানে এই সংখ্যাগুলো ঋণাত্মক এবং মূলদ সংখ্যা, অর্থাৎ ঋণাত্মক মূলদ সংখ্যা।

মূলদ সংখ্যার মৌলিক বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে আমরা সাধারণ ভগ্নাংশকে সরল করতে পারি। এক্ষেত্রে হর ও লব উভয়কে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে মূলদ সংখ্যার মৌলিক বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করতে হয়। যেমন–

$$\frac{৩০}{৩৬} = \frac{২\times৩\times৫}{২\times২\times৩\times৩} = \frac{৫}{৬}$$

একক কাজ

মৌলিক বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে নিচের ভগ্নাংশগুলো সরল করো।

$\frac{১২}{৩২}$, $-\frac{৬৩}{৪২}$, $\frac{৩৬}{১০৯}$, $\frac{১০৬}{১৫৯}$, $-\frac{৭৫}{১৫০}$, $-\frac{৩৯}{৬৫}$

জোড়ায় কাজ

জোড়ার প্রত্যেকে একটি কাগজে দুইটি করে সমতুল মূলদ সংখ্যা লেখো এবং একে অন্যের লেখা যাচাই করো।

বর্গমূল (Square Root)

বাগান করতে তোমাদের অনেকের শখ আছে। কারো ফুলের বাগানের শখ, কারো সবজির বাগান করতে ইচ্ছা হয়। আবার কারো ফলের বাগানের শখ। অনেকের শিক্ষা প্রতিষ্ঠানে খালি জায়গা আছে। আবার কারো বাড়ির আঙিনায় বা দেয়াল ঘেরা ছাদে খালি জায়গা আছে। ধরো, তোমাকে একটা বর্গাকার বাগান করতে জায়গা দেওয়া হলো যার ক্ষেত্রফল ১৬ বর্গ একক। তাহলে বলো তো, তোমার বাগানের দৈর্ঘ্য কত হবে? তুমি অবশ্যই বলবে, দৈর্ঘ্য ৪ একক। কারণ–

আমরা জানি, একটি বর্গাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল দৈর্ঘ্যের বর্গের সমান। অর্থাৎ দৈর্ঘ্য ৪ একক হলে,

ক্ষেত্রফল = ৪ এর বর্গ $=$ ৪^২ $=$ ৪ $\times$ ৪ $=$ ১৬ বর্গ একক। এখানে ৪ কে ১৬ এর বর্গমূল বলে এবং ৪ কে লেখা হয় $\sqrt{১৬}$, অর্থাৎ,

$$৪ = \sqrt{১৬}$$

এবার বলো তো, আর কি কোনো সংখ্যা আছে যাকে বর্গ করলে ১৬ হয়? তোমার উত্তর নিচে লিখে রাখো।

তোমাদের শুধু একটুখানি স্মরণ করিয়ে দিতে চাই যে, তোমরা আগের শ্রেণিতে ঋণাত্মক সংখ্যার গুণ শিখেছ। গাণিতিক প্রয়োজনে আমাদের ঋণাত্মক সংখ্যার ব্যবহারও জানতে হবে। দেখ,

$-$৪ এর বর্গ $=$১৬

তাহলে, $-$৪ ও কি ১৬ এর বর্গমূল হবে? হ্যাঁ, ৪ এর মতোই $-$৪, ১৬ এর একটি বর্গমূল। তাহলে, ১৬ এর বর্গমূল হচ্ছে ২টি। একটি ৪ এবং অন্যটি $-$৪। তবে,

$$-৪ \neq \sqrt{১৬}$$

এখানে $\sqrt{}$ শুধু ধনাত্মক বর্গমূলকেই নির্দেশ করে। অর্থাৎ,

$$\sqrt{১৬} = ৪$$

তাহলে,

$$-৪ = -\sqrt{১৬}$$

কোনো সংখ্যার ধনাত্মক বর্গমূলকে ঐ সংখ্যার উপর $\sqrt{}$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং একে **প্রধান বর্গমূল** (principal square root) বলে। অন্য মূলটিকে ঐ সংখ্যার উপর $-\sqrt{}$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ,

$$৪ = \sqrt{১৬} \qquad \text{এবং } -৪ = -\sqrt{১৬}.$$

চলকের মাধ্যমে আমরা বলতে পারি, একটি সংখ্যা a, অন্য একটি অঋণাত্মক সংখ্যা b-এর একটি বর্গমূল হবে যদি $a^2 = b$ হয়। এখানে b কে a-এর বর্গ বলে এবং a কে b-এর বর্গমূল বলে। যদি a ধনাত্মক হয়, তবে

$$a = \sqrt{b}$$

যেহেতু যে কোনো সংখ্যার বর্গ ০ অথবা একটি ধনাত্মক সংখ্যা, সুতরাং ০ এবং যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যার বর্গমূল আছে। ০ এর বর্গমূল ০ । অর্থাৎ $\sqrt{০} = ০$। অন্য যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যার ২টি বর্গমূল আছে। একটি ধনাত্মক অপরটি **ঋণাত্মক। এবার বলো তো, কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল পাওয়া যাবে কি? তোমার উত্তর যুক্তিসহ নিচে লিখে রাখো।**

পূর্ণবর্গ সংখ্যার প্রধান বর্গমূল

তোমরা কি বলতে পারবে ২ এর বর্গ সংখ্যার $\sqrt{}$ কত? নিচে লিখে রাখো।

এবার বলো তো –২ এর বর্গ সংখ্যার $\sqrt{}$ কত? বুঝতেই পারছো, $\sqrt{(-২)^২} = \sqrt{৪} = ২$.

তাহলে, সংখ্যারাশিকে বিমূর্ত রাশির মাধ্যমে আমরা লিখতে পারি,

a বাস্তব সংখ্যা হলে, $\sqrt{a^২} = |a|$

এখানে, $|a| = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ a, & a \geq 0. \end{cases}$

$|a|$ কে a-এর **পরম মান** বলে।

পরম মানের সূত্র অনুযায়ী,

$|২| = ২$ এবং $|-২| = -(-২) = ২.$

অমূলদ সংখ্যার খোঁজে

এবার ধরো, তোমাকে একটা বর্গাকার বাগান করতে জায়গা দেওয়া হলো যার ক্ষেত্রফল ১৫ বর্গ একক। তাহলে বলো তো, তোমার বাগানের দৈর্ঘ্য কত হবে? তুমি অবশ্যই বলবে, দৈর্ঘ্য $\sqrt{১৫}$ একক। এখন প্রশ্ন হলো, $\sqrt{১৫}$ কি মূলদ সংখ্যা? অর্থাৎ $\sqrt{১৫}$ কে কি $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায়? এই প্রশ্নের উত্তর খুঁজতে আমাদেরকে একটু পিথাগোরাসের যুগে যেতে হবে। চলো ঘুরে আসি পিথাগোরাসের যুগে।

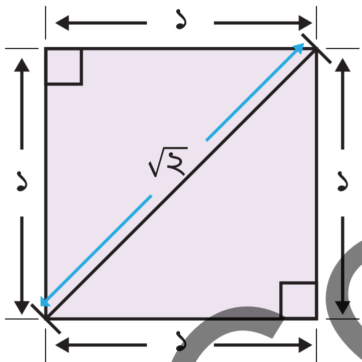
(Hippasus)

গ্রিসের গণিতবিদ পিথাগোরাসের অনুসারী হিপ্পাসাসের মাথায় একদিন প্রশ্ন জাগে যে, একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য ১ একক (১ মিটার, ১ সেমি, ১ ইঞ্চি যা ইচ্ছে হতে পারে) হলে সেই বর্গের কর্ণের দৈর্ঘ্য কত একক? যেহেতু বর্গকে কর্ণ বরাবর কেটে অর্ধেক করলে আমরা একটি সমকোণী ত্রিভুজ পাই যার উচ্চতা ও ভূমি পরস্পর

সমান। তাহলে, প্রশ্নটা এভাবেও বলা যেতে পারে, ১ একক দৈর্ঘ্যের একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত একক?

পিথাগোরাসের সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$(\text{অতিভুজের দৈর্ঘ্য})^{২} = (\text{ভূমির দৈর্ঘ্য})^{২} + (\text{উচ্চতার দৈর্ঘ্য})^{২}$



অর্থাৎ, অতিভুজের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(\text{ভূমির দৈর্ঘ্য})^{২} + (\text{উচ্চতার দৈর্ঘ্য})^{২}} = \sqrt{১^{২} + ১^{২}}$ একক $= \sqrt{২}$ একক

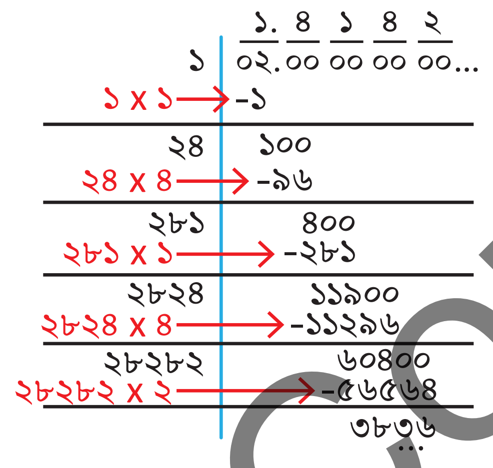
আর এই দৈর্ঘ্য কি মূলদ হবে? হিপ্পাসাসের দাবি ছিল যে এটি মূলদ সংখ্যা নয়। অর্থাৎ $\sqrt{২}$ কে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না এবং তিনি সেটি প্রমাণও করেছিলেন। হিপ্পাসাসের এই প্রমাণের মাধ্যমে $\sqrt{২}$ এর মতো 'মূলদ নয়' এমন একটি সংখ্যার ব্যাপারে মানুষ প্রথম জানতে পারে। তোমরা প্রমাণের বিষয়ে উপরের শ্রেণিতে জানতে পারবে। এই ধরনের সংখ্যাকে **অমূলদ সংখ্যা** বলে। $\sqrt{২}$ এর মতো তোমার বাগানের দৈর্ঘ্য $\sqrt{১৫}$ ও একটি অমূলদ সংখ্যা। কিন্তু তোমরা দেখতেই পাচ্ছ, এই সংখ্যাগুলো বাস্তব সমস্যা থেকে এসেছে। সুতরাং এরা বাস্তব সংখ্যা। এ ধরনের সংখ্যার মান কত এবং কীভাবে পরিমাপ করা যায় সেটি জানা আমাদের দরকার।

উল্লেখ্য যে স্বাভাবিক সংখ্যার মধ্যে যারা পূর্ণবর্গ শুধু তাদের বর্গমূল মূলদ সংখ্যা এবং যারা পূর্ণবর্গ নয় তাদের বর্গমূল অমূলদ সংখ্যা।

সাধারণভাবে বলা যায় যে, বাস্তব সংখ্যার জগত থেকে সকল মূলদ সংখ্যা সরিয়ে নিলে যা অবশিষ্ট থাকবে তা-ই হলো অমূলদ সংখ্যা।

সংখ্যার বর্গমূলের মান ও পরিমাপ

পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূলের মান কীভাবে বের করতে হয় তা আমরা শিখেছি। পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূলের মান একটি পূর্ণ সংখ্যা। কিন্তু পূর্ণবর্গ সংখ্যা না হলে তার বর্গমূল একটি অমূলদ সংখ্যা। তখন আমরা কীভাবে তার মান বের করব? চলো $\sqrt{২}$ এর মান ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করি।



ছক-২.২

যেমন– চার দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মানের ক্ষেত্রে সংখ্যার দশমিক বিন্দুর পর কমপক্ষে ৮টি অঙ্ক নিব। এক্ষেত্রে প্রয়োজনমতো ডানদিকে ০ (শূন্য) বসিয়ে নিব। ছক-২.২-এ $\sqrt{২}$ এর মান ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে ৪ দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করা হয়েছে।

একক কাজ

১. ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে $\sqrt{২}$ এর মান ৬ দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করো।

২. ডিজিটাল ডিভাইস ব্যবহার করে $\sqrt{২}$ এর মান বের করো এবং ৬ দশমিক স্থান পর্যন্ত তোমার বের করা মানের সঙ্গে মিলিয়ে নাও। কোনো পার্থক্য আছে কি? পার্থক্য থাকলে ভুল সংশোধন করো।

৩. ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে $\sqrt{১৫}$ এর মান ৪ দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করো।

৪. ডিজিটাল ডিভাইস ব্যবহার করে $\sqrt{১৫}$ এর মান বের করো এবং ৪ দশমিক স্থান পর্যন্ত তোমার বের করা মানের সঙ্গে মিলিয়ে নাও। কোনো পার্থক্য আছে কি? পার্থক্য থাকলে ভুল সংশোধন করো।

৫. ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে এবং ডিজিটাল ডিভাইস ব্যবহার করে পূর্ণবর্গ নয় এমন আরও ৫টি সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করো।

প্রধান বর্গমূলের বৈশিষ্ট্য

বর্গমূলের বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে আমরা পূর্ণ সংখ্যার বর্গমূলের সরলীকরণ করতে পারি। বর্গমূলের কয়েকটি বৈশিষ্ট্য এখানে দেওয়া হলো।

শূন্য বা শূন্যের চেয়ে বড়ো যে কোনো পূর্ণ সংখ্যা a এবং b হলে,

$$\sqrt{a}\sqrt{a} = a, \qquad (-\sqrt{a})(-\sqrt{a}) = a, \qquad \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

উদাহরণ: $\sqrt{৩৬} = \sqrt{২ \times ২ \times ৩ \times ৩} = \sqrt{২ \times ২}\sqrt{৩ \times ৩} = (\sqrt{২}\sqrt{২})(\sqrt{৩}\sqrt{৩}) = ২\times৩=৬$

সাধারণ ভগ্নাংশের প্রধান বর্গমূলের বৈশিষ্ট্য

যদি a শূন্য বা যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং b যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয় তবে,

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

উদাহরণ : $\frac{৯}{১৬}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করো।

সমাধান: উপরের বৈশিষ্ট্য থেকে আমরা লিখতে পারি, $\sqrt{\frac{৯}{১৬}} = \frac{\sqrt{৯}}{\sqrt{১৬}} = \frac{\sqrt{৩\times৩}}{\sqrt{৪\times৪}} = \frac{\sqrt{৩}\,\sqrt{৩}}{\sqrt{৪}\,\sqrt{৪}} = \frac{৩}{৪}$

তাহলে, $\frac{৯}{১৬}$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{৩}{৪}$

উদাহরণ : $\frac{২৭}{৪৮}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করো।

সমাধান : $\sqrt{\frac{২৭}{৪৮}} = \sqrt{\frac{৩\times৯}{৩\times১৬}} = \sqrt{\frac{৯}{১৬}} = \frac{\sqrt{৯}}{\sqrt{১৬}} = \frac{৩}{৪}$

অর্থাৎ $\frac{২৭}{৪৮}$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{৩}{৪}$

এখানে লক্ষ করো, $\frac{৯}{১৬}$ এর লব ও হর উভয়েই পূর্ণবর্গ। আবার $\frac{২৭}{৪৮}$ এর বেলায় লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করার পরে লব ও হর উভয়েই পূর্ণবর্গ সংখ্যা হয়েছে। এরূপ ভগ্নাংশকে **পূর্ণবর্গ ভগ্নাংশ** বলে।

উদাহরণ : $\frac{৯}{৩২}$ এর বর্গমূল নির্ণয় করো।

সমাধান : $\sqrt{\frac{৯}{৩২}} = \frac{\sqrt{৯}}{\sqrt{৩২}} = \frac{\sqrt{৩\times৩}}{\sqrt{২\times২\times২\times২\times২}} = \frac{৩}{৪\times\sqrt{২}} = \frac{৩\times\sqrt{২}}{৪\times\sqrt{২}\times\sqrt{২}} = \frac{৩\times\sqrt{২}}{৪\times২} = \frac{৩\sqrt{২}}{৮}$,

অর্থাৎ, $\frac{৯}{৩২}$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{৩\sqrt{২}}{৮}$

এখানে লক্ষ করো, $\frac{৯}{৩২}$ এর লব = ৯ পূর্ণবর্গ হলেও হর = ৩২ পূর্ণবর্গ নয়। আবার, লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করাও সম্ভব নয়। তাই, $\frac{৯}{৩২}$ পূর্ণবর্গ ভগ্নাংশ নয়।

একক কাজ

উপরের পদ্ধতিতে এবং ডিজিটাল ডিভাইস ব্যবহার করে $\frac{৩২}{৫০}, \frac{৪১}{৪৪১}, \frac{১০৮৯}{১২১}$ এই সাধারণ ভগ্নাংশগুলোর বর্গমূল নির্ণয় করে পূর্ণবর্গ ভগ্নাংশ কি না তা চিহ্নিত করো এবং উভয় পদ্ধতিতে প্রাপ্ত ফলাফল তুলনা করে মতামত দাও।

দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয়

তোমরা পূর্বের শ্রেণিগুলোতে দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগের নানা পদ্ধতি এবং দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করে কীভাবে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগের সহজ কৌশল পাওয়া যায় সে-সম্পর্কে জেনেছ। এই কৌশলগুলোর সমন্বয়ে আমরা দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করতে পারি।

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

উদাহরণ: ১.২ এর বর্গমূল নির্ণয় করো।

সমাধান : $\sqrt{১.২} = \sqrt{\frac{১২}{১০}} = \frac{\sqrt{৬}}{\sqrt{৫}} = \frac{\sqrt{৬}\,\sqrt{৫}}{\sqrt{৫}\,\sqrt{৫}} = \frac{\sqrt{৩০}}{৫}$

এবার ভাগ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে $\sqrt{৩০}$ এর মান দশমিকে বের করে ৫ দ্বারা ভাগ করে $\sqrt{১.২}$ এর মান দশমিকে পাওয়া যাবে।

একক কাজ

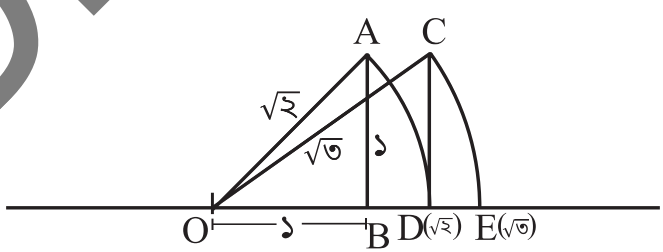
উপরের পদ্ধতিতে এবং ডিজিটাল ডিভাইস ব্যবহার করে ০.২৫, ০.০০০১, ১০.২৪ এই দশমিক ভগ্নাংশগুলোর বর্গমূল নির্ণয় করো এবং উভয় পদ্ধতিতে প্রাপ্ত ফলাফল তুলনা করে মতামত দাও।

সংখ্যারেখায় অমূলদ সংখ্যার অবস্থান

পূর্বে সংখ্যারেখা সম্পর্কে জেনেছ। পিথাগোরাসের সূত্র সম্পর্কেও জেনেছ। এখন আমরা সংখ্যারেখায় অমূলদ সংখ্যার অবস্থান সম্পর্কে আলোচনা করব।

সংখ্যারেখায় $\sqrt{২}$ এবং $\sqrt{৩}$ এর অবস্থান নির্ণয়

সংখ্যারেখায় মূলবিন্দু O থেকে ডানে ১ একক দূরে B বিন্দু নেই এবং B বিন্দু থেকে লম্বভাবে ১ একক দূরে A বিন্দু নেই। এবার বলো তো OA এর দূরত্ব কত? পিথাগোরাসের সূত্র অনুযায়ী,



চিত্র-২.২

$$OA = \sqrt{১^২ + ১^২} = \sqrt{২}$$

এখন O বিন্দু হতে ডানদিকে OA এর সমান করে সংখ্যারেখায় একটি বিন্দু D নেই। তাহলে D বিন্দুই সংখ্যারেখায় $\sqrt{২}$ এর অবস্থান।

এবার D বিন্দুতে লম্বভাবে ১ একক দুরে C বিন্দু নেই। এবার বলো তো OC এর দূরত্ব কত? পিথাগোরাসের সূত্র ব্যবহার করে দেখাও যে OC = $\sqrt{৩}$. এখন O বিন্দু হতে ডানদিকে সংখ্যারেখায় OC এর সমান করে একটি বিন্দু E নেই। তাহলে E বিন্দুই সংখ্যারেখায় $\sqrt{৩}$ এর অবস্থান।

☞ এখানে একটি বিষয় লক্ষণীয় যে, $\sqrt{২}$ এবং $\sqrt{৩}$ এর সঠিক মান আমরা বের করতে না পারলেও এদেরকে সংখ্যারেখায় সঠিকভাবে উপস্থাপন করা যায়।

একক কাজ

এই পদ্ধতি অনুসরণ করে $\sqrt{৪}, \sqrt{৫}, \sqrt{৬}, \sqrt{৭}$ ... বিন্দুগুলোর অবস্থান নির্ণয় করো।

ঘনমূল (Cube root)

তোমরা ইতোমধ্যে বর্গমূল সম্পর্কে জেনেছ। তাহলে তোমরা কি বলতে পারবে ঘনমূল কী? বর্গের উদাহরণ থেকে আমরা জানি, বর্গমূল হলো বর্গের বিপরীত প্রক্রিয়া। তাহলে ঘনমূল হবে ঘনের বিপরীত প্রক্রিয়া। বীজগাণিতিক রাশির মাধ্যমে আমরা বলতে পারি, a, b এর একটি ঘনমূল হবে যদি

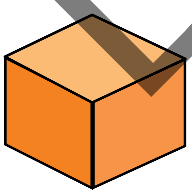
$$a^৩ = b \text{ হয়।}$$

ঘনমূল প্রকাশের জন্য $\sqrt[৩]{}$ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। যেহেতু, ৪ এর ঘন ৬৪ অর্থাৎ,

$৪^৩ = ৪ \times ৪ \times ৪ = ৬৪$. সুতরাং

$$৬৪ \text{ এর ঘনমূল} = \sqrt[৩]{৬৪} = ৪$$

আবার বর্গমূল নির্ণয়ের সময় আমরা দেখেছিলাম, বর্গমূল হলো একটি বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য। তেমনি ঘনমূল হলো একটি ঘনকের এক বাহুর দৈর্ঘ্য।



একটি ঘনক এর প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য x মিটার এবং আয়তন ৬৪ ঘনমিটার । তাহলে আমরা পাই,

$x.x.x$=৬৪, সুতরাং $x^৩$=৬৪ বা, $x = \sqrt[৩]{৬৪} = ৪$

এবার ভেবে দেখো তো, $\sqrt[৩]{৬৪} = ৪$ হলে , $\sqrt[৩]{-৬৪}$ বাস্তবে কি নির্দেশ করে?

বলো তো $\sqrt[৩]{-৬৪}$ এর মান কত হতে পারে? অর্থাৎ কোন সংখ্যাকে ঘন করলে –৬৪ হবে? তোমরা অবশ্যই বলবে –৪, কারণ $(-৪) \times (-৪) \times (-৪) = -৬৪$

অর্থাৎ $(-৪)^{৩} = -৬৪$

সুতরাং, আমরা বলতে পারি,

$x^{৩} = y$ হলে $x = y^{\frac{১}{৩}}$, যেখানে x এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে।

ঘনমূলের বৈশিষ্ট্য

ঘনমূলের বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে আমরা পূর্ণ সংখ্যার ঘনমূলের সরলীকরণ করতে পারি। ঘনমূলের কয়েকটি বৈশিষ্ট্য এখানে দেওয়া হলো।

যে কোনো পূর্ণ সংখ্যা a এবং b হলে,

$$\sqrt[৩]{a}\,\sqrt[৩]{a}\,\sqrt[৩]{a} = (\sqrt[৩]{a})^{৩} = a, \qquad \sqrt[৩]{ab} = \sqrt[৩]{a}\,\sqrt[৩]{b}$$

মৌলিক উৎপাদকের সাহায্যে ঘনমূল নির্ণয়

বর্গমূল নির্ণয়ের মতো ঘনমূল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে প্রথমে সংখ্যাটিকে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হবে। যেমন– ২১৬ এর ক্ষেত্রে

$$২১৬ = ২\times২\times২\times৩\times৩\times৩=(২\times২\times২)\times(৩\times৩\times৩)$$

দেখ, এখানে ২ আছে ৩টি এবং ৩ আছে ৩টি। বর্গমূল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে আমরা প্রতি জোড়া একই সংখ্যা থেকে একটি করে নিয়ে বর্গমূল নির্ণয় করেছি। এখন ঘনমূল নির্ণয়ের জন্য আমরা প্রতি তিনটি একই সংখ্যা থেকে একটি করে নিয়ে গুণ করব। তাহলে, ২১৬ এর ঘনমূল = ২ x ৩ = ৬ অর্থাৎ

$$\sqrt[৩]{২১৬} = ২\times৩=৬$$

একক কাজ

মৌলিক উৎপাদক বা গুণনীয়কের সাহায্যে নিচের সংখ্যাগুলোর ঘনমূল নির্ণয় করো।

১২১৬১, –৯২৬১, ১৫৬২৫, –২৬২১৪৪, ৯২৬১০০০, ৩২৭৬৮

ভগ্নাংশের ঘনমূল

এখন চলো দেখি ভগ্নাংশের ঘনমূল নির্ণয় করা যায় কীভাবে? এক্ষেত্রে আমরা ঘন ও ঘনমূলের ধারণা ব্যবহার করতে পারি।

$$\frac{৬৪}{১২৫} \text{ এর ঘনমূল} = \sqrt[৩]{\frac{৬৪}{১২৫}} = \sqrt[৩]{\frac{৪\times৪\times৪}{৫\times৫\times৫}} = \sqrt[৩]{\left(\frac{৪}{৫}\right)^৩} = \frac{৪}{৫}$$

আবার,

$$\frac{\sqrt[৩]{৬৪}}{\sqrt[৩]{১২৫}} = \frac{৪}{৫} = \frac{\sqrt[৩]{৪^৩}}{\sqrt[৩]{৫^৩}}$$

তাহলে দেখা যাচ্ছে, বর্গমূলের মতো একটি ভগ্নাংশের ঘনমূল তার লব ও হরের ঘনমূলের ভাগফলের সমান। এক্ষেত্রে খেয়াল করো যে, ভগ্নাংশের লব ও হর উভয়ই ধনাত্মক সংখ্যা। কোনোটি যদি ঋণাত্মক হয় তাহলে কি একইভাবে ঘনমূল নির্ণয় করা সম্ভব হবে? ভেবে দেখো।

সাধারণ ভগ্নাংশের ঘনমূলের বৈশিষ্ট্য

যদি a যে কোনো পূর্ণসংখ্যা এবং b শূন্য ব্যতীত যে কোনো পূর্ণসংখ্যা হয় তবে,

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

একক কাজ

ভগ্নাংশগুলোর ঘনমূল নির্ণয় করো: $\frac{২৭}{২১৬}$, $-\frac{৭০৪৯৬৯}{৩৫৯৩৭}$, $\frac{১৩৮২৪}{১৬৬৩৭৫}$

বর্গমূল এবং ঘনমূলের প্রক্রিয়াকরণ

মূলদ সংখ্যার মতো আমরা বর্গমূল ও ঘনমূলের যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করতে পারি।

যোগ বা বিয়োগ

যোগ বা বিয়োগের ক্ষেত্রে একই সংখ্যার বর্গমূল বা ঘনমূল হতে হবে এবং তাদের সহগের যোগ বা বিয়োগ করতে হবে।

উদাহরণ : $৫\sqrt{২}$ এর সঙ্গে $২\sqrt{২}$ কে যোগ এবং বিয়োগ করো।

সমাধান :

$$৫\sqrt{২} + ২\sqrt{২} = (৫ + ২)\sqrt{২} = ৭\sqrt{২}$$

$$৫\sqrt{২} - ২\sqrt{২} = (৫ - ২)\sqrt{২} = ৩\sqrt{২}$$

গুণ বা ভাগ

বর্গমূল বা ঘনমূলের বৈশিষ্ট্য এবং মূলদ সংখ্যার গুণ বা ভাগের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা বর্গমূল বা ঘনমূলের গুণ এবং ভাগ করতে পারি।

উদাহরণ : $\sqrt{২} + \sqrt{৩}$ এর সঙ্গে $\sqrt{২} - \sqrt{৩}$ কে গুণ করো।

সমাধান :

$$\left(\sqrt{২} + \sqrt{৩}\right)\left(\sqrt{২} - \sqrt{৩}\right) = \sqrt{২}\sqrt{২} + \sqrt{২}\sqrt{৩} - \sqrt{২}\sqrt{৩} - \sqrt{৩}\sqrt{৩} = ২ - ৩ = -১$$

উপরের উদাহরণে কী পর্যবেক্ষণ করলে তা নিচে লিখে রাখো। এখানে উল্লেখ্য যে, $\sqrt{২} - \sqrt{৩}$ কে $\sqrt{২} + \sqrt{৩}$ এর **অনুবন্ধি (conjugate) রাশি** বলে। এবং উল্টোটাও সত্য।

ভাগের ক্ষেত্রে হরকে বর্গমূলমুক্ত করতে হবে।

উদাহরণ : $\sqrt{২}+\sqrt{৩}$ কে $\sqrt{২}-\sqrt{৩}$ দ্বারা ভাগ করো।

সমাধান : $\frac{\sqrt{২}+\sqrt{৩}}{\sqrt{২}-\sqrt{৩}} = \frac{(\sqrt{২}+\sqrt{৩})\,(\sqrt{২}+\sqrt{৩})}{(\sqrt{২}-\sqrt{৩})\,(\sqrt{২}+\sqrt{৩})} = \cdots = -(৫+২\sqrt{৬})$ [মাঝখানের ক্যালকুলেশন করে দেখাও]

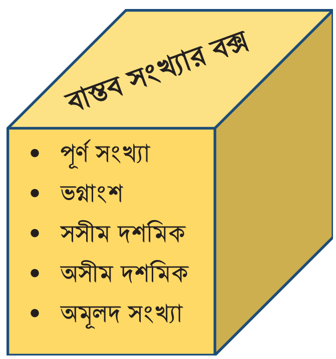
একক কাজ

- $২\sqrt{২}$ এর সঙ্গে $\sqrt{৮}$ কে যোগ এবং বিয়োগ করো।
- $\sqrt[৩]{২}$ এর সঙ্গে $\sqrt[৩]{৫৪}$ কে যোগ এবং বিয়োগ করো।
- দুটি সংখ্যা $২\sqrt{৩}+৫\sqrt{২}$ এবং $৭\sqrt{২}-৪\sqrt{৩}$ এর মধ্যে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করে সংখ্যারেখায় উপস্থাপন করো।
- $\frac{৫}{\sqrt{৩}+\sqrt{৫}}$ এর হরকে বর্গমূলমুক্ত করো
- ক এর মান বের করো : $\frac{১}{\sqrt{১৯}-\sqrt{১২}} = \frac{\sqrt{১৯}+\sqrt{ক}}{৭}$
- সরলীকরণ করো : $\frac{১}{৯+\sqrt{৩}} + \frac{১}{৩+\sqrt{২}}$

দুইটি অমূলদ সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ মূলদ বা অমূলদ যে কোনোটা হতে পারে।

বাস্তব সংখ্যার বক্স

চলো আমরা ছোটো ছোটো কাগজের টুকরায় নিচের সংখ্যাগুলোর মতো বিভিন্ন ধরনের সংখ্যা লিখি। এবার ঐ কাগজের টুকরাগুলোকে একটা বক্সে রাখি। বক্সের নাম দেই **'বাস্তব সংখ্যার বক্স'**। এবার তোমরা দৈবচয়ন প্রক্রিয়ায় একটি করে সংখ্যা বক্স থেকে তুলে নাও এবং সংখ্যাটি কী ধরনের তা ছক ২.৩ এ লেখো। এমন কোনো সংখ্যা পেয়েছ কি যেটা সম্পর্কে তোমরা জানো না?



$২, \quad \frac{৩}{৫}, \quad ২.৩৪, \quad \pi, \quad \sqrt{২}$

ছক ২.৩					
	পূর্ণসংখ্যা	ভগ্নাংশ	সসীম দশমিক	অসীম দশমিক	অমূলদ সংখ্যা
২					
$\frac{৩}{৫}$					

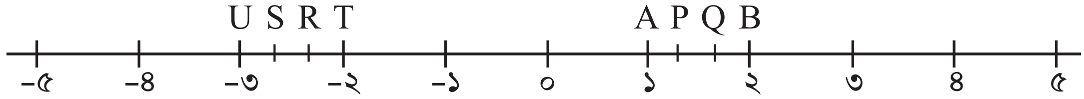
অনুশীলনী

১. ক্রীড়া প্রতিযোগিতায় একটি মজার খেলা হলো দীর্ঘ লাফ। ধরা যাক তোমাকে দীর্ঘ লাফ প্রতিযোগিতায় ১০ মিটার দূরের একটি দেয়াল ছুঁতে হবে কিন্তু তুমি প্রতি লাফে শুধু অর্ধেক পথ যেতে পারবে। যেমন, প্রথম লাফে $\frac{১০}{২}$ = ৫ মিটার পথ গেলে, এরপরের লাফে $\frac{৫}{২}$ =২.৫ মিটার পথ গেলে দেয়াল ছুঁতে কটি লাফ দিতে হবে তা কি বের করতে পারবে?

২. একটি বর্গাকার আমবাগানে ১৩৬৯টি আমগাছ আছে। বাগানের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ উভয় দিকে সমান সংখ্যক আমগাছ থাকলে, প্রত্যেক সারিতে গাছের সংখ্যা যুক্তিসহকারে উপস্থাপন করো। দৈর্ঘ্যে ও প্রস্থে দুটি গাছের মধ্যে দূরত্ব ১০০ ফুট হলে, বাগানের ক্ষেত্রফল আনুমানিক কত হবে বলে তুমি মনে করো?

৩. ১ থেকে ১০০ পর্যন্ত সকল পূর্ণবর্গ সংখ্যার বর্গমূল ও পূর্ণঘন সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয় করো।

৪. একটি সংখ্যারেখায় P, Q, R, S, T, U, A এবং B বিন্দুগুলো এমনভাবে আছে যে, TR = RS = SU এবং AP = PQ = QB. এমতাবস্থায় P, Q, R এবং S মূলদ সংখ্যাসমূহের মান নির্ণয় করো।



৫. নিচের সংখ্যাগুলো মূলদ নাকি অমূলদ যুক্তিসহ ব্যাখ্যা দাও।

৮.৯২৯২৯২..., ০.১০১০০১০০০১..., ৬৫৩৪.৭৮৯৭৮৯..., ২.১৮২৮১৮২৮, ০.১২২৩৩৩...

৬. $২\sqrt{২} + ৫\sqrt{৮}$ এবং $৭\sqrt{৮} - ৪\sqrt{২}$ সংখ্যা দুটির যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করে সংখ্যা রেখায় উপস্থাপন করো।

৭. সরল করো : $\sqrt[৩]{\frac{৩}{৫}} + \frac{\sqrt[৩]{৯}}{৫} - \sqrt[৩]{৮১}$

৮. নিশিথ চাকমার দুইটি বর্গাকার সবজি বাগান আছে।

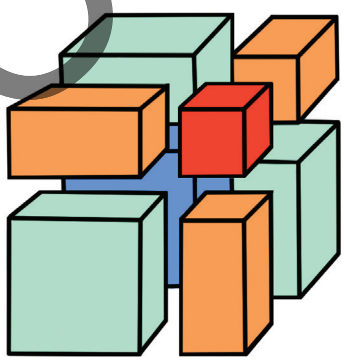
একটির দৈর্ঘ্য $২\sqrt{২}$ একক এবং অন্যটির ক্ষেত্রফল এটির ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ। তাহলে অন্য বাগানের দৈর্ঘ্য কত?

৯. তোমার দুইটি ঘনক আকৃতির বক্স আছে। একটির আয়তন ১৬ ঘনফুট এবং অন্যটির আয়তন ১১ ঘনফুট। প্রতিটি বক্সের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য কত? যদি উক্ত বক্স দুটি ভেঙে তাদের আয়তনের যোগফলের সমান আয়তনের একটি ঘনক আকৃতির বক্স বানানো হয় তবে সেটির প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য কত হবে?

ঘনবস্তুতে দ্বিপদী ও ত্রিপদী রাশি খুঁজি

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে

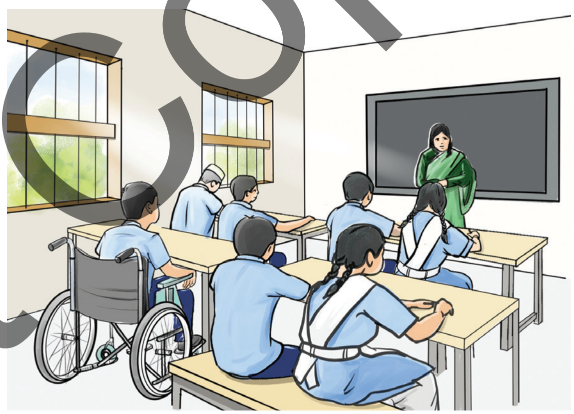
- সংখ্যারাশির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে প্রতীক ব্যবহারের মাধ্যমে বীজগাণিতিক সম্পর্ক তৈরি
- গাণিতিক সম্পর্ক থেকে বাস্তব বা বিমূর্ত প্যাটার্ন উদ্‌ঘাটন
- প্রতীক এবং চলকের মাধ্যমে গাণিতিক সম্পর্ক প্রকাশ
- জ্যামিতিক আকৃতি এবং গাণিতিক রাশির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন
- বাস্তব সমস্যা সমাধানে গাণিতিক রাশি ব্যবহার



ঘনবস্তুতে দ্বিপদী ও ত্রিপদী রাশি খুঁজি

পূর্বের শ্রেণিতে তোমরা তোমাদের অভিজ্ঞতা অর্জনে চলক, বীজগাণিতিক রাশি, পদ, বীজগাণিতিক রাশির উৎপাদক, লসাগু, গসাগু ইত্যাদি ব্যবহার করেছ। বাস্তব জীবনে সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক রাশি খুবই গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। তোমরা বর্গক্ষেত্র এবং আয়তক্ষেত্রের বিষয়ে দ্বিপদী এবং ত্রিপদী রাশির ব্যবহার শিখেছ। তোমরা শিখেছ, আয়তক্ষেত্র একটি দ্বিমাত্রিক আকৃতি। অর্থাৎ এটি পরিমাপের দুটি মাত্রা– দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ। বর্গক্ষেত্র আয়তক্ষেত্রের একটি বিশেষ অবস্থা। বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ সমান। মজার ব্যাপার হলো, আমাদের চারপার্শ্বে দ্বিমাত্রিক বস্তুর চেয়ে ত্রিমাত্রিক বস্তুই বেশি। যেমন– বই, খাতা, আলমারি, শোকেস, বুকশেল্ফ ইত্যাদি। ত্রিমাত্রিক বস্তুতে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ছাড়াও একটি মাত্রা যোগ হয়, সেটি হলো– উচ্চতা। দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সম্বলিত দ্বিমাত্রিক বস্তুকে আমরা যেমন আয়তাকার বলি, তেমনি দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সম্বলিত ত্রিমাত্রিক বস্তুকে ঘনক আকার বলি। এই অভিজ্ঞতায় আমরা এ সকল ঘনবস্তুর মাধ্যমে দ্বিপদী এবং ত্রিপদী রাশির ব্যবহার শিখব। এসো আমরা প্রথমে জেনে নিই কীভাবে দ্বিমাত্রিক বস্তু থেকে দ্বিপদী রাশি গঠন করা যায়।

শ্রেণিকক্ষের জানালায় দ্বিপদী রাশি খুঁজি



তোমার শ্রেণিকক্ষের জানালার দিকে লক্ষ করো, জানালার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ আছে। জানালার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের মধ্যে সম্পর্ক বের করো। যেমন, আমার জানালার দৈর্ঘ্য 5 ফুট এবং প্রস্থ 3 ফুট। তাহলে, দৈর্ঘ্য, প্রস্থের চেয়ে 2 ফুট বেশি। অর্থাৎ

দৈর্ঘ্য = প্রস্থ + 2 ফুট = $(3 + 2)$ ফুট

এটি দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের মধ্যে একটি সম্পর্ক। আমরা এই সম্পর্কটিকে অন্যভাবেও বলতে পারি। যেমন– দৈর্ঘ্য, প্রস্থের দ্বিগুণের চেয়ে 1 ফুট কম। অর্থাৎ

দৈর্ঘ্য = $2 \times$ প্রস্থ $- 1$ফুট = $(2 \times 3 - 1)$ ফুট = $(6 - 1)$ ফুট।

এখানে, $3 + 2$ এবং $6 - 1$ হলো সংখ্যার দুটি দ্বিপদী রাশি।

দ্বিপদী সংখ্যারাশি থেকে দ্বিপদী বীজগাণিতিক রাশির ধারণা

ধরো তুমি কোনো একটি শ্রেণি কক্ষের জানালার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ জানো না কিন্তু জানালার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের মধ্যে সম্পর্ক জানো। সম্পর্কটি হলো দৈর্ঘ্য, প্রস্থের চেয়ে 2 ফুট বেশি। অর্থাৎ

দৈর্ঘ্য = প্রস্থ + 2 ফুট

এখানে দৈর্ঘ্য, প্রস্থের উপর নির্ভরশীল। এই সম্পর্কটি দেখানোর জন্য আমাদের একটি চলক ব্যবহার করতে হবে। যদি প্রস্থ x ফুট হয়, তবে

দৈর্ঘ্য = $(x + 2)$ ফুট

এখানে, $x + 2$ একটি দ্বিপদী রাশি। এরকম যেসকল রাশির দুইটি পদ থাকে তাকে **দ্বিপদী রাশি** বলে। দ্বিপদী রাশি $x + 2$ এ একটি চলক x রয়েছে। তাই এটি একটি একচলক বিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি। এই ধরনের যেসকল দ্বিপদী রাশিতে একটি চলক থাকে তাকে **এক চলক বিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি** বলে।

চিংড়ি মাছের ঘেরে দ্বিপদী রাশি খুঁজি

এবার আমরা দুইচলক বিশিষ্ট বীজগাণিতিক দ্বিপদী রাশির ধারণা দিব। রায়হানের বাবার দুইটি আয়তাকার চিংড়ি মাছের ঘের A এবং B আছে (পার্শ্বের চিত্র লক্ষ করো)। ঘের B এর দৈর্ঘ্য ঘের A এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের যোগফলের সমান। এখানে ঘের A এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ দুটিই অজানা রাশি। সুতরাং আমাদের দুটি চলক ব্যবহার করতে হবে। ধরি, ঘের A এর দৈর্ঘ্য x ও প্রস্থ y । তাহলে ঘের B এর দৈর্ঘ্য $x + y$। অর্থাৎ ঘের B এর দৈর্ঘ্য দুইচলক বিশিষ্ট একটি দ্বিপদী রাশি। এরকম যেসকল দ্বিপদী রাশির দুইটি চলক থাকে তাকে **দুই চলক বিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি** বলে।

একক কাজ :

নিজের মতো করে 5টি দ্বিপদী রাশি লেখো এবং বাস্তব উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করো

দলগত কাজ:

তোমার রোল নম্বরকে 4 দ্বারা ভাগ করো। যাদের ভাগশেষ যত হবে তাদের দলের নম্বর তত। যেমন, যাদের ভাগশেষ 0 তাদের দলের নম্বর 0 অর্থাৎ দল-0. এভাবে দল-1, দল-2 এবং দল-3 মোট 4টি দল তৈরি হবে। তোমার দলের নম্বরের সাথে 1 এবং 5 যোগ করো। যে নম্বর দুটি হয়, নিচের থেকে সেই নম্বরের রাশি দুটি নিয়ে বাস্তব উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করো।

1) $x + 3$	2) $2x + 1$	3) $3x - 3$	4) $x - 2$
5) $5x + y$	6) $x^2 - 1$	7) $x^2 - y$	8) $x + y^2$

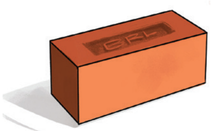
এবার একদল অন্য দলগুলোর কাজ মূল্যায়নের জন্য নিচের সারণীটির মতো একটি করে সারণী পূরণ করবে এবং শ্রেণি শিক্ষকের কাছে জমা দিবে। এখানে দল-0 এর মূল্যায়ন সারণী দেওয়া হলো।

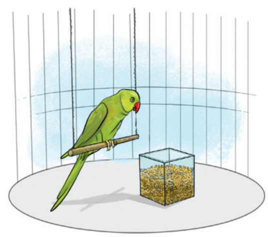
ছক ৩.১

দল-0 এর মূল্যায়ন	দ্বিপদী রাশি	উপস্থাপিত বাস্তব উদাহরণ মূল্যায়ন	তোমাদের মূল্যায়নের যুক্তি	তোমরা একটি বাস্তব উদাহরণ উপস্থাপন করো
দল-1	2)			
	6)			
দল-2	3)			
	7)			
দল-3	4)			
	8)			

ঘনক ও আয়তাকার ঘনবস্তু (Cube and Rectangular Solid)

তোমরা সপ্তম শ্রেণিতে ঘনক ও আয়তাকার ঘনবস্তুর আকার ও আয়তনের সঙ্গে পরিচিত হয়েছ। ঘনক ও আয়তাকার ঘনবস্তু ত্রিমাত্রিক। আয়তক্ষেত্রের সঙ্গে আরও একটি মাত্রা যোগ হয়ে আয়তাকার ঘনবস্তু তৈরি হয়। যেমন– তোমার শ্রেণিকক্ষের মেঝের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ আছে। এর সঙ্গে উচ্চতা যোগ হয়ে আয়তাকার শ্রেণিকক্ষ তৈরি হয়েছে। মজার ব্যাপার হলো, ঘনবস্তু থেকে একটি মাত্রা বাদ দিলে আমরা আবার আয়তক্ষেত্র পাই। যেমন, তোমার শ্রেণিকক্ষের উচ্চতা বাদ দিলে আবার মেঝে পাবে। এবার বলো তো দৈর্ঘ্য বাদ দিলে কী পাবে? এভাবে প্রস্থ বাদ দিলে কী পাবে? আমরা আগেই বলেছি, আমাদের চারপার্শ্বে দ্বিমাত্রিক বস্তুর চেয়ে ত্রিমাত্রিক বস্তুই বেশি। পার্শ্বের চিত্রে পাখির খাবার রাখার বক্সটি একটি ঘনক এবং ইট একটি আয়তাকার ঘনবস্তু।





আয়তন (Volume)

ঘনকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান এবং ঘনকের আকারকে আমরা লিখি, দৈর্ঘ্য × দৈর্ঘ্য × দৈর্ঘ্য

ঘনকের আয়তন = (দৈর্ঘ্য)^3। অর্থাৎ যদি, ঘনকের দৈর্ঘ্য= l হয়, তবে ঘনকের আয়তন $V = l^3$.

আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান নয়।

আয়তাকার ঘনবস্তুর আকার দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা।

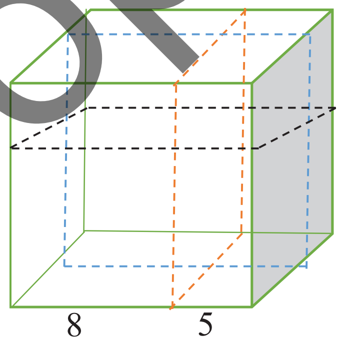
যদি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য= l, প্রস্থ= w এবং উচ্চতা = h হয়, তবে আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন $V = lwh$

শোকেস তৈরিতে দ্বিপদী রাশির ঘন

তুমি তোমার বাসায় চারিদিকে খোলা একটি বর্গাকার কাচের শোকেস তৈরি করতে চাও। শোকেসটির চারিদিকে বিভিন্ন মাপের তাক থাকবে। এসো আমরা কাগজে ডিজাইন করে শোকেসের একটি মডেল তৈরি করি।

উদাহরণ-১ ধরো তোমার বর্গাকার কাচের শোকেসের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বরাবর একদিকে ৮ একক এবং অপরদিকে ৫ একক রেখে মাঝখানে একটি করে কাচের তাক দিবে (পার্শ্বের চিত্রের মতো)।

- তোমার শোকেসের আয়তনের গাণিতিক আকার লেখ এবং আয়তন বের করো।
- শোকেসে কয়টি ঘর তৈরি হবে?
- ঘরগুলোতে V_1, V_2, V_3... ইত্যাদি লেবেল বসাও।
- প্রত্যেক ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বের করো।
- প্রত্যেক ঘরের আয়তনের গাণিতিক আকার লেখ এবং আয়তন বের করো।
- একই আকারের ঘরের সংখ্যা বের করো।
- শোকেসের আয়তন এবং ঘরের আয়তনের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কি? থাকলে সম্পর্কটি লেখো।



উপরের প্রশ্নের উত্তরগুলো থেকে ছক ৩.২ পূরণ করো।

ছক ৩.২			
শোকেসের	দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা	আকার	আয়তন
	$8+5, 8+5, 8+5$		$(8+5)^3$
ঘরের লেবেল	ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা	ঘরের আয়তনের আকার	ঘরের আয়তন
V_1	8, 8, 8		
V_2	8, 5, 8		
V_3	8, 5, 8		
V_4	5, 5, 8		
V_5	8, 8, 5		

V_6	8, 5, 5		
V_7	8, 5, 5		
V_8	5, 5, 5		

শোকেসের আয়তন, $V = (8 + 5)^3 = 13^3 = 2197$

শোকেসের বিভিন্ন ঘরের আয়তনের যোগফল

$$= 8^3 + (8^2 \times 5) + (8^2 \times 5) + (8^2 \times 5) + (8 \times 5^2) + (8 \times 5^2) + (8 \times 5^2) + 5^3$$

$$= 8^3 + 3 \times (8^2 \times 5) + 3 \times (8 \times 5^2) + 5^3$$

$$= 512 + (3 \times 320) + (3 \times 200) + 125$$

$$= 512 + 960 + 600 + 125 = 2197$$

☞ লক্ষ করে দেখো যে, শোকেসের আয়তন এবং শোকেসের বিভিন্ন ঘরের আয়তনের যোগফল সমান। সুতরাং এই সম্পর্ক থেকে আমরা লিখতে পারি,

$$(8 + 5)^3 = 8^3 + 3 \times (8^2 \times 5) + 3 \times (8 \times 5^2) + 5^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

উদাহরণ-২ এবার বলো তো, শোকেসের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বরাবর একদিকে 7 একক এবং অপরদিকে 6 একক রেখে মাঝখানে একটি করে কাঁচের তাক দিলে শোকেসের আয়তন এবং শোকেসের ভিতরের বিভিন্ন ঘরগুলোর আয়তনের সম্পর্ক কী হতো? তোমরা অবশ্যই পাবে,

$$(7+6)^3 = 7^3 + 3 \times (7^2 \times 6) + 3 \times (7 \times 6^2) + 6^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

জোড়ায় কাজ

শোকেসের আকার 13 × 13 × 13 ঠিক রেখে অন্য কোনো দুটি সংখ্যার মাধ্যমে উপরের মতো কোনো সম্পর্ক লিখতে পারবে? পারলে এখানে লিখে রাখো। (সংকেত : দুটি সংখ্যা যেমন : 9, 4. এরকম আরও কমপক্ষে দুই জোড়া সংখ্যার জন্য লেখো।

উপরের দুইটি উদাহরণ এবং জোড়ায় কাজ থেকে তুমি যে বিষয়গুলো লক্ষ করেছ তা তোমার নোটবুকে লিখে রাখো। সতীর্থদের সঙ্গে আলোচনা করে তাদের ভিন্ন রকমের লক্ষ করা বিষয়গুলো যুক্তিসহকারে বোঝার চেষ্টা করো। শ্রেণিশিক্ষকের সাহায্য নিতে পার।

প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ

প্যাটার্ন গণিতের একটি খুবই গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। তোমরা কি জানো গণিতবিদরা বা বিজ্ঞানীগণ কোনো তত্ত্ব দেওয়ার আগে এবং প্রমাণের আগে কী করেন? তারা যে বিষয়ে তত্ত্ব দিবেন সেই বিষয়ের কিছু ঘটনা গভীর মনোযোগ দিয়ে পর্যবেক্ষণ করেন। ঘটনাগুলোর একটি প্যাটার্ন বের করেন এবং সেই প্যাটার্ন অনুযায়ী একটি তত্ত্ব দেন এবং পরবর্তীতে গাণিতিক যুক্তির মাধ্যমে বা ল্যাবরেটরিতে পরীক্ষার মাধ্যমে সেই তত্ত্ব প্রমাণ করেন। একজন গণিতবিদের মতো আমরাও ঘনবস্তুর আয়তনের সম্পর্কের প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে দ্বিপদী রাশির ঘন এর সূত্র বের করব এবং সূত্র প্রমাণ করব।

☞ লক্ষ করো, (i) নং সমীকরণ অনুসারে আমরা লিখতে পারি,

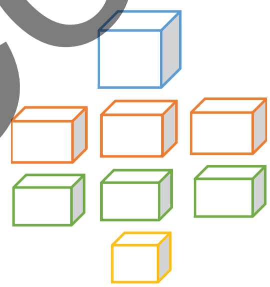
$8 \times 8 \times 8$ আকারের ঘর সংখ্যা $= 1$

$8 \times 8 \times 5$ আকারের ঘর সংখ্যা $= 3$

$8 \times 5 \times 5$ আকারের ঘর সংখ্যা $= 3$

$5 \times 5 \times 5$ আকারের ঘর সংখ্যা $= 1$

মোট ঘর সংখ্যা $= 8$



একক কাজ

(ii) নং সমীকরণ অনুসারে,

- ঘরগুলোর আকার, বিভিন্ন আকারের ঘর সংখ্যা এবং মোট ঘর সংখ্যা লেখো।
- তোমাদের উপরের জোড়ায় কাজ থেকে পাওয়া পাওয়া ঘরগুলোর আকার, বিভিন্ন আকারের ঘর সংখ্যা এবং মোট ঘর সংখ্যা লেখো।

দ্বিপদী রাশির ঘন এর সূত্র

উপরের সংখ্যারাশির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে দুইটি সংখ্যার জন্য আমরা চলক হিসেবে a ও b ব্যবহার করে শোকেসের আয়তন এবং শোকেসের বিভিন্ন ঘরের আয়তনের যোগফলের সম্পর্ক থেকে আমরা লিখতে পারি,

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

এটি দ্বিপদী রাশির ঘন এর একটি সূত্র। এই সূত্রটি আমরা বিভিন্নভাবে প্রমাণ করতে পারি।

বীজগাণিতিক নিয়ম ব্যবহারের মাধ্যমে প্রমাণ: সূচকের নিয়ম থেকে আমরা পাই,

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

$$=(a+b)(a^2+ab+ab+b^2)$$

$$=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$$

$$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

জ্যামিতিক প্রমাণ (আটটি ঘনবস্তুর খেলা) :

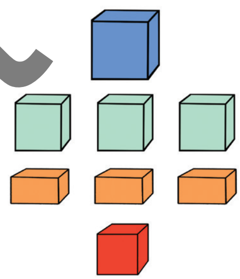
এখানে আমরা ল্যাবরেটরিতে কাজ করার মতো আটটি ঘনবস্তু তৈরি করে উপরের সূত্রটি প্রমাণ করব। কাজটি করার জন্য সুবিধামতো একটি কাঠি নাও। কাঠিটির মধ্যে (পার্শ্বের চিত্রের মতো) পেন্সিল দিয়ে একটি দাগ দাও। দাগের একপার্শ্বে a এবং অন্যপার্শ্বে b দ্বারা চিহ্নিত করো। এবার উপযুক্ত কাদামাটি, শক্ত কাগজ অথবা কর্কশীট অথবা তোমার সুবিধামতো কোনো উপাদান দিয়ে a এবং b এর সমান করে নিম্নের দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা আকারের আটটি ঘনবস্তু তৈরি করো।

$a \times a \times a$ আকারের 1টি

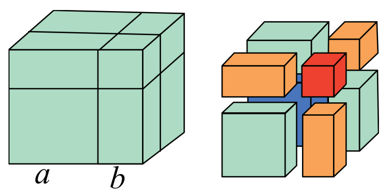
$a \times a \times b$ আকারের 3টি

$a \times b \times b$ আকারের 3টি

$b \times b \times b$ আকারের 1টি



এবার নিচের কাজগুলো করো।



- পার্শ্বের চিত্রের মতো ঘনবস্তুগুলোকে এমনভাবে একত্রে সাজাও যেন একটি ঘনক তৈরি হয়।
- তৈরিকৃত ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্যের সঙ্গে কাঠিটির দৈর্ঘ্যের কোনো মিল আছে কী? না থাকলে তোমার তৈরিকৃত ঘনবস্তুগুলোতে ত্রুটি রয়েছে। ত্রুটিগুলো ঠিক করে নাও।
- তৈরিকৃত ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্যের সঙ্গে কাঠিটির দৈর্ঘ্যের মিল থেকে তৈরিকৃত ঘনকের দৈর্ঘ্য এবং আয়তন বের করো।
- আটটি ঘনবস্তুর আকার থেকে আয়তনের যোগফল বের করো।

- তৈরিকৃত ঘনকের আয়তনের সঙ্গে আটটি ঘনবস্তুর আয়তনের সম্পর্কটি গাণিতিকভাবে লেখো। তুমি সূত্রটি পেয়ে যাবে। যদি সূত্রের সঙ্গে না মিলে তবে বুঝতে হবে কোথাও ভুল করেছ। শ্রেণিশিক্ষক বা সতীর্থদের সঙ্গে আলোচনা করে ভুল সংশোধন করো।

দ্বিপদী রাশির বিয়োগের ঘন এর সূত্র

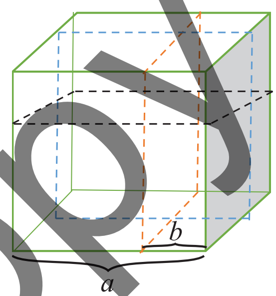
ধরি, একটি ঘনকের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক। প্রতি বাহু থেকে b একক বাদ দিয়ে একটি করে তাক দিলে নিম্নের দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা আকারের আটটি ঘর তৈরি হবে।

$(a-b) \times (a-b) \times (a-b)$ আকারের 1টি

$(a-b) \times (a-b) \times b$ আকারের 3টি

$(a-b) \times b \times b$ আকারের 3টি

$b \times b \times b$ আকারের 1টি



শর্তানুযায়ী, এই আটটি ঘরের আয়তনের যোগফল ঘনকের আয়তন $= a^3$ এর সমান হবে। অর্থাৎ,

$$a^3=(a-b)(a-b)(a-b)+3(a-b)(a-b)b+3(a-b)b^2+b^3$$

$$=(a-b)^3+3(a-b)b(a-b+b)+b^3$$

$$=(a-b)^3+3ab(a-b)+b^3$$

$$=(a-b)^3+3a^2b-3ab^2+b^3$$

সুতরাং

$$\boxed{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$$

এটি দ্বিপদী রাশির বিয়োগের ঘন এর সূত্র।

দ্বিপদী রাশির ঘন এর সূত্র থেকে সূত্র গঠন

দ্বিপদী রাশির ঘন এর মূল সূত্র দুটি হলো :

১) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

২) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

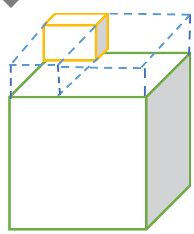
একক কাজ ৪

১. বীজগাণিতিক নিয়ম ব্যবহার করে উপরের মূল সূত্র দুটি থেকে নিচের সূত্রগুলো বের করো।

৩)	$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
৪)	$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
৫)	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
৬)	$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - \mathrm{b})$
৭)	$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$
৮)	$a^3 - \mathrm{b}^3 = (a-b)\,(a^2 + ab + b^2)$

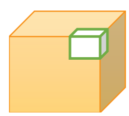
২. বাস্তব ঘনবস্তুর ধারণা ব্যবহার করে (৪) এবং (৫) নম্বর সূত্র দুটি প্রমাণ করো

(পার্শ্বের চিত্রে বাস্তব ঘনবস্তুর ধারণা দেওয়া আছে)।



৩. বাস্তব ঘনবস্তুর ধারণা ব্যবহার করে (৭) এবং (৮) নম্বর সূত্র দুটি প্রমাণ করো।

(পার্শ্বের চিত্রে বাস্তব ঘনবস্তুর ধারণা দেওয়া আছে)।



দ্বিপদী রাশির ঘন এর সূত্রের ব্যবহার

সমস্যা ১. দ্বিপদী রাশির ঘন এর সূত্র ব্যবহার করে $(102)^3$ এর মান বের করো।

সমাধান :

$(102)^3 = (100+2)^3$

$= 100^3 + 3 \times 100^2 \times 2 + 3 \times 100 \times 2^2 + 2^3$ [সূত্র (১) অনুসারে]

$= 1000000 + 3 \times 10000 \times 2 + 3 \times 100 \times 4 + 8$

$= 1000000 + 60000 + 1200 + 8$

$= 1061208$

সমস্যা ২. দ্বিপদী রাশির ঘন এর সূত্র ব্যবহার করে $2x - y$ এর ঘন নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে মূল সূত্র (২) -এ $a = 2x,\ b = y$ বসিয়ে আমরা পাই,

$$(2x - y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2y + 3(2x)\,y^2 - y^3$$

$$= 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$$

একক কাজ

1) দ্বিপদী রাশির ঘন এর সূত্র ব্যবহার করে নিম্নের সংখ্যারাশির মান বের করো।

i) $(52)^3$ ii) $(79)^3$

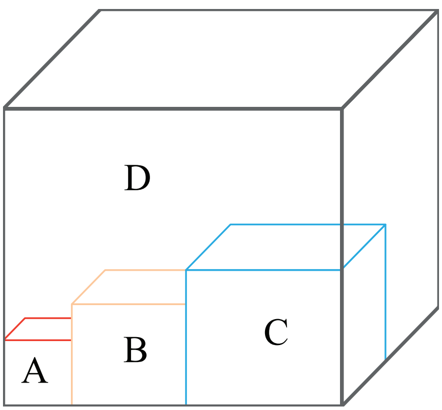
2) সূত্র ব্যবহার করে নিম্নের দ্বিপদী রাশির ঘন নির্ণয় করো।

i) $x + 1$ ii) $x - 3$ iii) $3x + 5$ iv) $5x - 3$

v) $2x + 3y$ vi) $x^2 + 1$ vii) $x^2 - y$ viii) $x^2 + y^2$

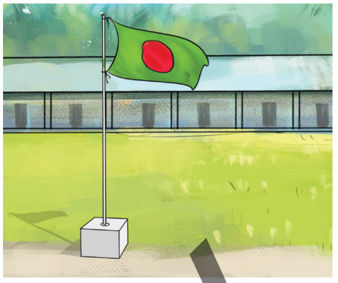
ত্রিপদী রাশির ঘন (Cube of Trinomial Expression)

ত্রিপদী রাশি (Trinomial Expression)



পার্শ্বের চিত্রে A, B, C এবং D চারটি ঘনক আকৃতির বক্স দেওয়া আছে। বক্স D এর প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য বক্স A, B, C এর প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টির সমান। তাহলে বক্স D এর বাহুর দৈর্ঘ্য বক্স A, B, C এর বাহুর দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভর করছে, যেখানে বক্স A, B, C এর বাহুর দৈর্ঘ্যে অজানা। ধরি বক্স A, B, C এর প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যে যথাক্রমে x, y, z একক। তাহলে, D বক্সের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য হবে $x + y + z$ একক। এখানে $x + y + z$ তিনটি পদ বিশিষ্ট একটি বীজগাণিতিক রাশি। এরকম যেসকল বীজগাণিতিক রাশির তিনটি পদ থাকে তাকে **ত্রিপদী রাশি** বলে। লক্ষ করো যে, $x + y + z$ একটি তিন চলক বিশিষ্ট ত্রিপদী রাশি।

একটি বাস্তব উদাহরণ



তোমার স্কুলের ঘনক আকৃতির পানির ট্যাংকের দৈর্ঘ্য স্কুলের পতাকা স্ট্যান্ডের ভিত্তির দৈর্ঘ্যে, প্রস্থ ও উচ্চতার সমষ্টির সমান। অর্থাৎ পানির ট্যাংকের দৈর্ঘ্য, পতাকা স্ট্যান্ডের ভিত্তির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার উপর নির্ভরশীল। যদি পতাকা স্ট্যান্ডের ভিত্তির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে x, y এবং z হয়, তবে পানির ট্যাংকের দৈর্ঘ্য কত হবে? তোমরা অবশ্যই বলবে $x + y + z$। এটি একটি ত্রিপদী রাশি।

একক কাজ

১. নিজের মতো করে 10টি ত্রিপদী রাশি লেখো। সেখান থেকে 2টি ত্রিপদী রাশিকে বাস্তব উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করো।

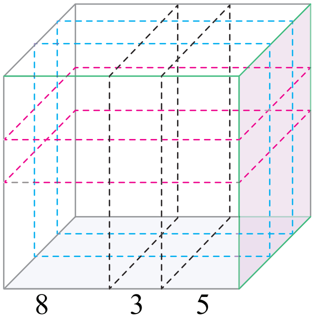
২. নিচের কোনটি ত্রিপদী রাশি নয়? তোমার সপক্ষে যুক্তি দাও।

i) $xy + 3y$ ii) xy iii) $x + y - 1$

iv) $x^2 - 2x + 1$ v) xy^2z

ত্রিপদী রাশির ঘন

দ্বিপদী রাশির ঘন এর মতো এসো আমরা কাগজে ডিজাইন করে নিচের চিত্রের মতো ঘনকের একটি মডেল তৈরি করি। এক্ষেত্রে ঘনকের প্রতি বাহুর মাঝখানে দুটি করে কাগজের তাক দেওয়া আছে। ধরো ঘনকটির প্রতি বাহু বরাবর প্রথমে 8 ইঞ্চি পরে 3 ইঞ্চি এবং শেষে 5 ইঞ্চি করে জায়গা আছে । এবার একটু চিন্তা করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর লেখো।



- ঘনকের আয়তনের গাণিতিক আকার লেখো এবং আয়তন বের করো।
- এবার বলো তো ঘনকটিতে কয়টি ঘর তৈরি হবে?
- প্রত্যেক ঘরের আকার বের করো।
- একই আকারের ঘরের সংখ্যা বের করো এবং তাদের আকার লেখো।
- প্রত্যেক আকারের ঘরের আয়তন বের করো।
- ঘনকের আয়তন এবং ঘরগুলোর আয়তনের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কি? থাকলে সম্পর্কটি লেখো।

- উপরের প্রশ্নের উত্তরগুলো থেকে ছক ৩.৩ পূরণ করো।

ছক ৩.৩			
ঘনকের আকার	সংখ্যা	আয়তন	
$16 \times 16 \times 16$		$(8+3+5)^3$	
ঘরের আকার	সংখ্যা		
$8 \times 8 \times 8$	1	8^3	
$3 \times 3 \times 3$		3^3	
$5 \times 5 \times 5$		5^3	
$8 \times 8 \times 3$	3	$3 \times 8^2 \times 3$	
$8 \times 8 \times 5$			
$8 \times 3 \times 3$			
$8 \times 5 \times 5$			
$3 \times 3 \times 5$			
$3 \times 5 \times 5$			
$8 \times 3 \times 5$	6	$6 \times 8 \times 3 \times 5$	

সুতরাং ঘনকের আয়তন, $V = (8+3+5)^3 = 16^3 = 4096$

এবং বিভিন্ন ঘরের আয়তনের যোগফল

$$= 8^3 + 3^3 + 5^3 + (3 \times 8^2 \times 3) + (3 \times 8^2 \times 5) + (3 \times 8 \times 3^2) +$$
$$(3 \times 8 \times 5^2) + (3 \times 3 \times 5^2) + (3 \times 3^2 \times 5) + (6 \times 8 \times 3 \times 5)$$
$$= 512 + 27 + 125 + 576 + 960 + 216 + 600 + 225 + 135 + 720$$
$$= 4096$$

যেহেতু ঘনকের আয়তন এবং বিভিন্ন ঘরের আয়তনের যোগফল সমান, সুতরাং

$$(8+3+5)^3 = 8^3 + 3^3 + 5^3 + (3 \times 8^2 \times 3) + (3 \times 8^2 \times 5) + (3 \times 8 \times 3^2) +$$
$$(3 \times 8 \times 5^2) + (3 \times 3 \times 5^2) + (3 \times 3^2 \times 5) + (6 \times 8 \times 3 \times 5)$$

একক কাজ

নিচের তিনটি সংখ্যার যোগফলের ঘন তৈরিতে যেসকল ঘনবস্তু তৈরি করতে হবে তাদের আকার লেখো। প্রত্যেক আকারের কয়টি করে ঘনবস্তু তৈরি করতে হবে?

1) 5, 3, 2   ২) 8, 5, 3   ৩) 13, 8, 5   ৪) 5, 7, 12   ৫) 6, 4, 2

ত্রিপদী রাশির ঘন এর সূত্র

দ্বিপদী রাশির মতো যদি, যে কোনো তিনটি সংখ্যার জন্য আমরা চলক হিসেবে a, b ও c ব্যবহার করি, তবে উপরের ত্রিপদী রাশির ঘনক তৈরীর সংখ্যা রাশির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে লিখতে পারি,

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2\\ +3a^2c+3ac^2+6abc\end{aligned}}$$

এটি ত্রিপদী রাশির ঘন এর একটি সূত্র। এই সূত্রটি আমরা বিভিন্নভাবে প্রমাণ করতে পারি।

বীজগাণিতিক নিয়ম ব্যবহারের মাধ্যমে প্রমাণ

সূচকের নিয়ম থেকে আমরা পাই,

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)\\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac)\\ &= a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2\\ &\quad +3a^2c+3ac^2+6abc\end{aligned}$$

ঘনবস্তুর মাধ্যমে প্রমাণ

এবার আমরা একটি প্রজেক্টের মাধ্যমে প্রয়োজনীয় ঘনবস্তু তৈরি করে ত্রিপদী রাশির ঘন এর সূত্র প্রমাণ করব।

দলগত কাজ

আগের মতো চারটি দল গঠন করতে হবে। দল-0, দল-1, দল-2, দল-3। প্রত্যেক দল প্রয়োজনীয় ঘনবস্তু তৈরি করবে এবং এই ঘনবস্তুগুলোর মাধ্যমে একটি ঘনক তৈরি করবে।

প্রজেক্টের নাম

ত্রিপদী রাশির ঘন এর মাধ্যমে ঘনবস্তু তৈরি

প্রয়োজনীয় উপাদান: একটি উপযুক্ত কাঠি (যে দৈর্ঘ্যের ঘনক তৈরি হবে), পেন্সিল, কাদামাটি অথবা শক্ত কাগজ অথবা কাঠের টুকরা অথবা কর্কশীট অথবা দলগত মুক্ত চিন্তায় উপযুক্ত কোনো উপাদান, ইত্যাদি (তোমাদের কাজের প্রয়োজনে যা লাগবে)।

কার্যপ্রণালি

শেণিশিক্ষক সুবিধামতো মাপের একটি কাঠি ক্লাসে নিয়ে আসবেন। প্রত্যেক দল এই কাঠিটির সমান মাপের একটি করে কাঠি নাও এবং কাঠিটিতে পেন্সিল দিয়ে দুইটি দাগ দাও এবং দাগের মধ্যে a, b এবং c দ্বারা চিহ্নিত করো (পার্শ্বের চিত্রের মতো, প্রত্যেক দলের কাঠিতে দাগ ভিন্ন ভিন্ন জায়গায় হবে)। কাঠিটির দাগ বরাবর কেটে তিন টুকরা করো। এবার সংগৃহীত কাদামাটি, শক্ত কাগজ অথবা কাঠের টুকরা অথবা কর্কশীট অথবা দলগত মুক্ত চিন্তায় উপযুক্ত কোনো উপাদান দিয়ে a, b এবং c এর সমান করে ত্রিপদী রাশির ঘন এর সূত্রের ডানদিকের প্রতিটি পদের জন্য একটি করে ঘনবস্তু বানাও। যেমন –

a^3 পদের জন্য $a \times a \times a$ আকারের 1টি ঘনবস্তু বানাতে হবে,

$3a^2b$ পদের জন্য $a \times a \times b$ আকারের 3টি ঘনবস্তু বানাতে হবে,

$6abc$ পদের জন্য $a \times b \times c$ আকারের 6টি ঘনবস্তু বানাতে হবে, ইত্যাদি।

এবার বলো তো মোট কটি ঘনবস্তু বানাতে হবে? হিসাব করে দেখো মোট 27টি ঘনবস্তু বানাতে হবে। কাজটি দলের সবাই ভাগ করে নাও। এবার তোমার দলের 27টি ঘনবস্তু একত্র করে এমনভাবে একত্রে সাজাও যেন একটি ঘনক তৈরি হয়। দেখে অবাক হবে তৈরিকৃত ঘনকের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য শ্রেণিশিক্ষকের দেওয়া কাঠিটির দৈর্ঘ্যের সমান হবে। যদি না হয়, তাহলে বুঝতে হবে কোথাও ত্রুটি হয়েছে। এমতাবস্থায় তৈরিকৃত ঘনকটি ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করে ত্রুটি বের করে সংশোধন করতে হবে।

প্রজেক্টের ফলাফল সংরক্ষণ

- তৈরিকৃত ঘনকের দৈর্ঘ্য এবং আয়তন চলকের মাধ্যমে লেখো।
- 27টি ঘনবস্তুর প্রত্যেকটির আকার থেকে আয়তন বের করো এবং আয়তনের যোগফল চলকের মাধ্যমে লেখো।
- যেহেতু তৈরিকৃত ঘনকের আয়তন, 27টি ঘনবস্তুর আয়তনের যোগফলের সমান, সুতরাং এই সম্পর্ক থেকে সূত্রটি পাওয়া যাবে।

একক কাজ

ত্রিপদী রাশির ঘন এর সূত্র থেকে বীজগাণিতিক নিয়ম ব্যবহার করে নিচের সূত্রগুলো বের করো।

a) $(a + b - c)^3 = a^3 + b^3 - c^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3b^2c + 3bc^2 - 3a^2c + 3ac^2 - 6abc$

b) $(a - b + c)^3 = a^3 - b^3 + c^3 - 3a^2b + 3ab^2 + 3b^2c - 3bc^2 + 3a^2c + 3ac^2 - 6abc$

c) $(a - b - c)^3 = \mathrm{a}^3 - b^3 - c^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - 3b^2c - 3bc^2 - 3a^2c + 3ac^2 + 6abc$

d) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$

উৎপাদক (Factor)

'উৎপাদক' শব্দটির সঙ্গে তোমরা আগে থেকেই পরিচিত। তোমরা জানো, কোনো একটি সংখ্যার উৎপাদক আরেকটি সংখ্যা যাকে দিয়ে আগের সংখ্যাটিকে ভাগ করা যায়। যেমন, 5, 10 এর একটি উৎপাদক, কারণ, 10 কে 5 দিয়ে ভাগ করা যায়। আবার 2 ও 10 এর একটি উৎপাদক, কারণ, 10 কে 2 দিয়ে ভাগ করা যায়। এভাবে একটি সংখ্যার একাধিক উৎপাদক আছে। তোমরা জানো, 1 যে কোনো সংখ্যার একটি উৎপাদক। কারণ, যে কোনো সংখ্যাকে 1 দিয়ে ভাগ করা যায়। আবার যে কোনো সংখ্যা নিজেই তার একটি উৎপাদক। সুতরাং প্রত্যেকটি সংখ্যার কমপক্ষে 2টি উৎপাদক আছে। যেসকল সংখ্যার শুধু 2টি ভিন্ন উৎপাদক আছে সে সকল সংখ্যাই মৌলিক সংখ্যা। এবার আমরা সংখ্যারাশির ধারণা থেকে বীজগাণিতিক রাশির উৎপাদকের ধারণা পেতে পারি। কোনো একটি বীজগাণিতিক রাশির উৎপাদক আরেকটি বীজগাণিতিক রাশি যাকে দিয়ে আগের রাশিকে ভাগ করা যায়। যেমন, $x - 1$, বীজগাণিতিক রাশি $x^2 - 1$ এর একটি উৎপাদক, কারণ, $x^2 - 1$ কে $x - 1$ দিয়ে ভাগ করা যায়। আবার $x^2 - 1$ এর একটি উৎপাদক $x + 1$, কারণ, $x^2 - 1$ কে $x + 1$ দিয়ে ভাগ করা যায়। যেহেতু যে কোনো বীজগাণিতিক রাশিকে 1 দিয়ে ভাগ করা যায়, সুতরাং 1 যে কোনো বীজগাণিতিক রাশির একটি উৎপাদক। আবার যে কোনো বীজগাণিতিক রাশি নিজেই তার একটি উৎপাদক। সুতরাং প্রত্যেকটি বীজগাণিতিক রাশির কমপক্ষে 2টি উৎপাদক আছে। এই অভিজ্ঞতায় আমরা দ্বিপদী এবং ত্রিপদী রাশির ঘন এর উৎপাদক এবং এর ব্যবহার নিয়ে আলোচনা করব।

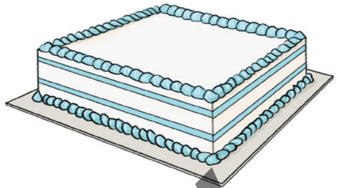
দ্বিপদী রাশির ঘন এর উৎপাদক (Factor of Cubic of a Binomial Expression)

সংখ্যার উৎপাদক (আমের ভাগ)

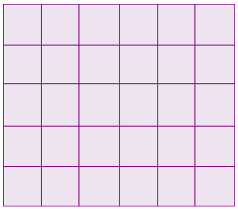
আফসানা তাদের গাছের 20টি আম তার আত্মীয়দের মধ্যে সমানভাবে ভাগ করে দিতে চায়। আফছানা আমগুলো কয়জন আত্মীয়কে সমানভাবে ভাগ করে দিতে পারবে? তুমি হয়তো বলবে 2 জনকে, কারণ, 10টা করে আম দিলে সমান 2 ভাগে ভাগ করা যাবে। অর্থাৎ 10দিয়ে 20কে ভাগ করা যায়। এখানে 10, 20 এর একটি উৎপাদক। এরকম যে সকল সংখ্যা দ্বারা 20কে ভাগ করা যায় ওই সকল সংখ্যাই 20 এর উৎপাদক। তুমি চাইলেও 6টা করে আম দিয়ে সমান ভাগে ভাগ করতে পারবে না। কারণ, 6, 20 এর উৎপাদক নয়। এবার বলো তো, কোন সংখ্যাগুলো 20 এর উৎপাদক? চিন্তা করে 20 এর সকল উৎপাদক নিচে লিখে রাখো।

এই ধারণাকে বীজগাণিতিক রাশির মাধ্যমে লিখলে আমরা লিখতে পারি, y দ্বারা x কে ভাগ করা যাবে যদি y, x এর একটি উৎপাদক হয়।

বর্গের উৎপাদক (কেক কাটি)



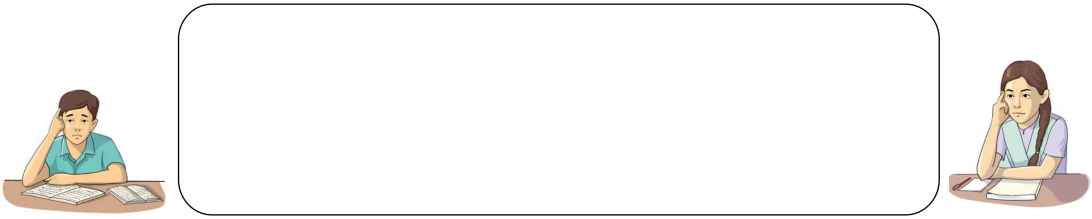
ধরো, তুমি একটি আয়তাকার কেককে সমান ভাগে ভাগ করতে চাও। কেকটির আকার $12'' \times 10''$। পূর্ণ ইঞ্চিতে কোন কোন আকারে এই কেকটিকে সমান ভাগে ভাগ করা যাবে? একটু ভেবে দেখো তো। আমি একটু সাহায্য করেছি। 2×2 আকারে সমানভাবে ভাগ করা যাবে এবং সমান 30 ভাগ হবে। বিশ্বাস না হলে, 12×10 আকারের একটি কাগজ নাও। এবার দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ উভয় দিকে $2''$ (দুই ইঞ্চি) পরপর একটি করে দাগ দাও। দেখো তো কাগজটি সমান কয় ভাগে ভাগ হয়েছে। অবশ্যই সমান 30 ভাগে ভাগ হয়েছে। যেহেতু 2×2 আকারে ভাগ করা যায়, সুতরাং 2×2 হবে 12×10 এর একটি উৎপাদক।



এবার একটু চিন্তা করে 12×10 আকারের কেকটিকে পূর্ণ ইঞ্চিতে যত আকারে সমান ভাগে ভাগ করা যাবে, সবকটি আকার এবং ঐ আকারের মোট ভাগ সংখ্যা নিচে লিখে রাখো (প্রয়োজনে কাগজে দাগ কেটে নিশ্চিত হও)।

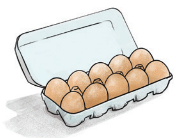
লক্ষ করে দেখো যে, তোমার লেখা আকারের মধ্যে 3×3 আকারের কোনো কেক নাই। সুতরাং 3×3, 12×10 এর উৎপাদক নয়।

12×10 এর উৎপাদকের আকারের সঙ্গে 12×10 আকারের কোনো সম্পর্ক খুঁজে পাও কি? পেলে এখানে লিখে রাখো।



ঘন এর উৎপাদক (ডিমের খাঁচা সাজিয়ে রাখি)

জামাল চাচার একটি দোকান আছে। সেখানে তিনি ডিম বিক্রি করেন। তাঁর $3' \times 3' \times 3'$ ($3'$ = তিন ফুট) ঘনক আকৃতির একটি ডিমের খাঁচা আছে যেখানে তিনি ডিমের বক্সগুলো সাজিয়ে রাখেন। যদি ডিমের বক্সগুলোর প্রতিটির আকার $1' \times 1' \times 6''$ হয়, তবে জামাল চাচা তাঁর খাঁচাটি পূর্ণ করে বক্সগুলো রাখতে পারবেন। কারণ, $1' \times 1' \times 6''$ আকারটি $3' \times 3' \times 3'$ এর একটি উৎপাদক। এখানে লক্ষ করো, $1'$, $3'$ এর একটি উৎপাদক এবং $6''$, $(3 \times 12)'' = 36''$ এর একটি উৎপাদক। এবার বলো তো, জামাল চাচা তাঁর ডিমের খাঁচাটি পূর্ণ করে কতগুলো $1' \times 1' \times 6''$ আকারের বক্স রাখতে পারবেন?



একক কাজ

১. জামাল চাচার ডিমের বক্সগুলোর আকার $1' \times 1' \times 4''$ হলে সে তাঁর ডিমের খাঁচাটি পূর্ণ করে কতগুলো বক্স রাখতে পারবেন?

২. জামাল চাচার ডিমের বক্সগুলোর আকার $1' \times 1' \times 5''$ হলে তিনি কি তাঁর ডিমের খাঁচাটি পূর্ণ করে রাখতে পারবেন?

ক) যদি খাঁচাটি পূর্ণ করে রাখতে পারে, তবে খাঁচাটি পূর্ণ করে কতগুলো বক্স রাখতে পারবেন?

খ) যদি খাঁচাটি পূর্ণ করে রাখতে না পারে, তবে কারণ কী? খাঁচাটির কত অংশ খালি থাকবে?

বীজগাণিতিক রাশির ঘন এর উৎপাদক

এবার সংখ্যা রাশির প্যাটার্ন পর্যবেক্ষণ করে আমরা বীজগাণিতিক রাশির মাধ্যমে উৎপাদকের সম্পর্ক উপস্থাপন করব। ধরো, একটি ঘনকের দৈর্ঘ্য x একক। তাহলে, ঘনকটির আয়তনের আকার হবে $x \times x \times x$ এবং আয়তন x^3। এখন যদি p, q এবং r প্রত্যেকেই x এর একটি উৎপাদক হয়, তবে ঘনকটিকে $p \times q \times r$ আকারে সমান ভাগে ভাগ করা যাবে। অর্থাৎ pqr হবে x^3 এর একটি উৎপাদক এবং ঘনকটিকে মোট $\frac{x^3}{pqr}$ টি

সমান ভাগে ভাগ করা যাবে। এবার বলো তো, x এর মান 5 হলে, ঘনকটিকে কোন কোন আকারে সমান ভাগে ভাগ করা যাবে এবং প্রত্যেক আকারে কতটি সমান ভাগ হবে? আকার এবং ভাগ সংখ্যা এই বক্সে লিখে রাখো।

এখন ধরি, একটি ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে x, y এবং z। তাহলে ঘনবস্তুটির আকার $x \times y \times z$। যদি p, q এবং r যথাক্রমে x, y এবং z এর একটি উৎপাদক হয়, তবে ঘন বস্তুটিকে $p \times q \times r$ আকারে সমান ভাগে ভাগ করা যাবে। অর্থাৎ pqr হবে xyz এর একটি উৎপাদক এবং ঘনবস্তুটিকে মোট $\frac{xyz}{pqr}$ টি সমান ভাগে ভাগ করা যাবে।

দ্বিপদী রাশির ঘন এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ

কোনো একটি বীজগাণিতিক রাশিকে 1 এবং ঐ রাশি ছাড়া অন্য কোনো রাশি দ্বারা ভাগ করা না গেলে ঐ বীজগাণিতিক রাশিকে **মৌলিক রাশি** বলে। প্রত্যেকটি বীজগাণিতিক রাশিকে মৌলিক রাশির গুণফল হিসেবে লেখা যায়। কোনো বীজগাণিতিক রাশিকে মৌলিক রাশির গুণফল হিসেবে প্রকাশ করাকে **উৎপাদকে বিশ্লেষণ** বলে এবং ঐ মৌলিক রাশিগুলোকে ঐ **রাশির মৌলিক উৎপাদক** বলে। একটি দ্বিপদী রাশির ঘনকে আমরা সহজেই উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারি। যেমন, $x + y$ এর ঘনকে আমরা লিখতে পারি-

$$(x + y)^3 = (x + y)\,(x + y)\,(x + y)$$

এটি $(x + y)^3$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ। আবার বীজগাণিতিক নিয়ম থেকে $x^3 + y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করলে আমরা পাই,

$$x^3 + y^3 = (x + y)\,(x^2 - xy + y^2)$$

ঘন রাশির গসাগু এবং লসাগু

তোমরা দুই বা ততোধিক বীজগাণিতিক রাশির গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গসাগু) এবং লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (লসাগু) সম্বন্ধে জেনেছ। দুই বা ততোধিক বীজগাণিতিক রাশির সকল (একাধিকবারসহ) সাধারণ মৌলিক উৎপাদকের গুণফলই ঐ দুই বা ততোধিক বীজগাণিতিক রাশিসমূহের **গসাগু**। অন্যদিকে কতগুলো বীজগাণিতিক রাশির সকল (একাধিকবার সহ) সাধারণ মৌলিক উৎপাদক, দুই বা ততোধিক বীজগাণিতিক রাশির সাধারণ মৌলিক উৎপাদক (সকল বীজগাণিতিক রাশি ব্যতিত, যদি থাকে) এবং অন্যান্য মৌলিক উৎপাদকসমূহের গুণফলই বীজগাণিতিক রাশি সমূহের লসাগু। একটি উদাহরণের মাধ্যমে বিষয়টি পরিষ্কার করা যাক।

উদাহরণ : x^3, x^2y, x^2y^2 এর গসাগু এবং লসাগু বের করো।

সমাধান : এখানে,

প্রথম রাশি, x^3 এর মৌলিক উৎপাদকসমূহ হলো : x, x, x

দ্বিতীয় রাশি, x^2y এর মৌলিক উৎপাদকসমূহ হলো : x, x, y

তৃতীয় রাশি, x^2y^2 এর মৌলিক উৎপাদকসমূহ হলো : x, x, y, y

অর্থাৎ, তিনটি বীজগাণিতিক রাশির সকল সাধারণ মৌলিক উৎপাদক : x, x (দুইবার)। সুতরাং

$$\text{গসাগু} = x \times x = x^2$$

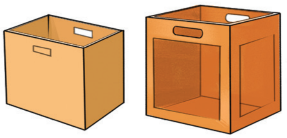
আবার, তিনটি বীজগাণিতিক রাশির সকল সাধারণ মৌলিক উৎপাদক : x, x (দুইবার)।

দ্বিতীয় এবং তৃতীয় রাশির সাধারণ মৌলিক উৎপাদক y

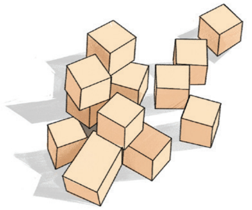
বাকি প্রথম রাশির মৌলিক উৎপাদক x এবং তৃতীয় রাশির মৌলিক উৎপাদক y। সুতরাং

$$\text{লসাগু} = x \times x \times y \times x \times y = x^3y^2$$

ঘন রাশির গসাগু



রাফিদ এবং রাহিমা দুই ভাই-বোন। তাদের 30 সেন্টিমিটার এবং 40 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুইটি ঘনক আকৃতির কাঠের বক্স আছে । তারা একই মাপের ঘনক আকৃতির মগের বক্স দ্বারা দুটি বক্সই সম্পূর্ণরূপে পূরণ করতে চায়।



- কোন কোন ঘনক আকৃতির (সেন্টিমিটারে) মগের বক্স দ্বারা তারা 30 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ঘনক আকৃতির কাঠের বক্স পূরণ করতে পারবে?
- কোন কোন ঘনক আকৃতির (সেন্টিমিটারে) মগের বক্স দ্বারা তারা 40 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ঘনক আকৃতির কাঠের বক্স পূরণ করতে পারবে?
- কোন কোন ঘনক আকৃতির (সেন্টিমিটারে) মগের বক্স দ্বারা তারা দুটি কাঠের বক্সই পূরণ করতে পারবে?

তোমার উত্তরগুলো দ্বারা নিচের ছক ৩.৪ পূরণ করো।

ছক ৩.৪								
ঘনক আকৃতির কাঠের বক্স	ঘনক আকৃতির মগের বক্স (সেন্টিমিটারে দৈর্ঘ্য)							
30 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যের	1		3		6		15	
40 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যের								
উভয় দৈর্ঘ্যের								

উভয় কাঠের বক্স সর্বোচ্চ কোন মাপের মগের বক্স দ্বারা পূর্ণ করতে পারবে সেটি বের করো। এটিই কাঠের বক্স দুটির দৈর্ঘ্য পরিমাপক সংখ্যাগুলোর গসাগু। মিলিয়ে দেখো সর্বোচ্চ 10 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ঘনক আকৃতির মগের বক্স দ্বারা উভয় কাঠের বক্স পূর্ণ করা যাবে। অর্থাৎ, 30^3 এবং 40^3 এর গসাগু হবে 10^3 ।

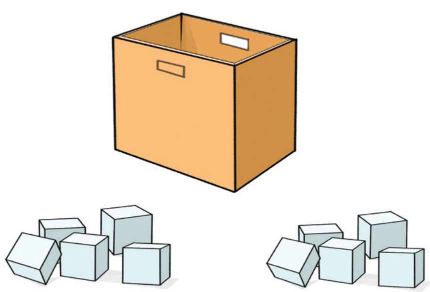
সংখ্যারাশির গসাগু পর্যবেক্ষণ করে আমরা বীজগাণিতিক প্রতীক এবং রাশির সম্পর্কের মাধ্যমে দুইটি রাশির ঘন এর গসাগু নির্ণয় করতে পারি। যদি x ও y এর গসাগু r হয়, তবে x^3 ও y^3 এর গসাগু হবে r^3।

একক কাজ

সর্বোচ্চ কোন আকৃতির ঘনক দ্বারা 10 একক এবং 6 একক দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুইটি ঘনক আকৃতির বক্স পূর্ণ করা যাবে।

ঘন রাশির লসাগু

রাফিদ 6 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ঘনক আকৃতির বক্সসহ মগ এবং রাহিমা 8 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ঘনক আকৃতির বক্সসহ মগ কিনবে। তারা তাদের মগগুলো রাখার জন্য ঘনক আকৃতির একটি কাঠের বক্সও কিনতে চায়। সর্বনিম্ন কোন আকৃতির কাঠের বক্স কিনলে তারা তাদের মগগুলো কাঠের বক্সে সম্পূর্ণরূপে পূর্ণ করে রাখতে পারবে?



এক্ষেত্রে রাফিদকে কয়টি ঘনক আকৃতির বক্সসহ মগ কিনতে হবে?

রহিমাকে কয়টি ঘনক আকৃতির বক্সসহ মগ কিনতে হবে?

এসো ছক ৩.৫ পূরণ করি।

ছক ৩.৫								
ঘনক আকৃতির মগের বক্স	প্রয়োজনীয় ঘনক আকৃতির কাঠের বক্স (সেন্টিমিটারে দৈর্ঘ্য)							
6 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যের	6		18		30			
8 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যের		16		32				
উভয় দৈর্ঘ্যের								

উভয় মাপের মগের বক্স সর্বনিম্ন কোন মাপের কাঠের বক্স দ্বারা সম্পূর্ণরূপে পূর্ণ করতে পারবে সেটি বের করো। এটিই মগের বক্স দুটির লসাগু। মিলিয়ে দেখ, উভয় আকৃতির মগের বক্স দ্বারা সর্বনিম্ন 24 সেন্টিমিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ঘনক আকৃতির কাঠের বক্সকে সম্পূর্ণরূপে পূর্ণ করা যাবে।

বীজগাণিতিক রাশির ঘন এর গসাগু নির্ণয়ের মতো আমরা বীজগাণিতিক প্রতীক এবং রাশির সম্পর্কের মাধ্যমে দুইটি রাশির ঘন এর লসাগু নির্ণয় করতে পারি। যদি x ও y এর গসাগু r হয়, তবে x^3 ও y^3 এর গসাগু হবে r^3।

একক কাজ

তোমরা বলো তো, 10 এবং 6 এর লসাগু কত হবে? তোমরা যে সংখ্যাটি বলবে সেটি সঠিক হলে সেই সংখ্যার ঘন, 10 এর ঘন এবং 6 এর ঘন এর লসাগু হবে।

অনুশীলনী

১. নিচের কোনটি দ্বিপদী রাশি নয়? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

ক) $xy + 3x$ খ) xy গ) $x + y - 1$

ঘ) $x^2 - 2x + 1$ ঙ) y^2

২. নিচের দ্বিপদী রাশিগুলো থেকে এক চলক ও দুই চলকবিশিষ্ট দ্বিপদী রাশি চিহ্নিত করো।

ক) $x + 1$ খ) $3x + 5$ গ) $x - 3$

ঘ) $5x - 2$ ঙ) $2x + 3y$ চ) $x^2 + 1$

ছ) $x^2 - y$ জ) $x^2 + y^2$

৩. নিচের বীজগাণিতিক রাশি থেকে এক চলক, দুই চলক ও তিন চলকবিশিষ্ট ত্রিপদী রাশি চিহ্নিত করো।

ক) $x + y + 3$ খ) $x^2 + 3x + 5$ গ) $xy + z - 3$ ঘ) $5x + y^2 - 2$

ঙ) $2x + 3y - z$ চ) $y^2 - y + 1$ ছ) $x^2 - yz + 2$ জ) $x^2 + y^2 - y$

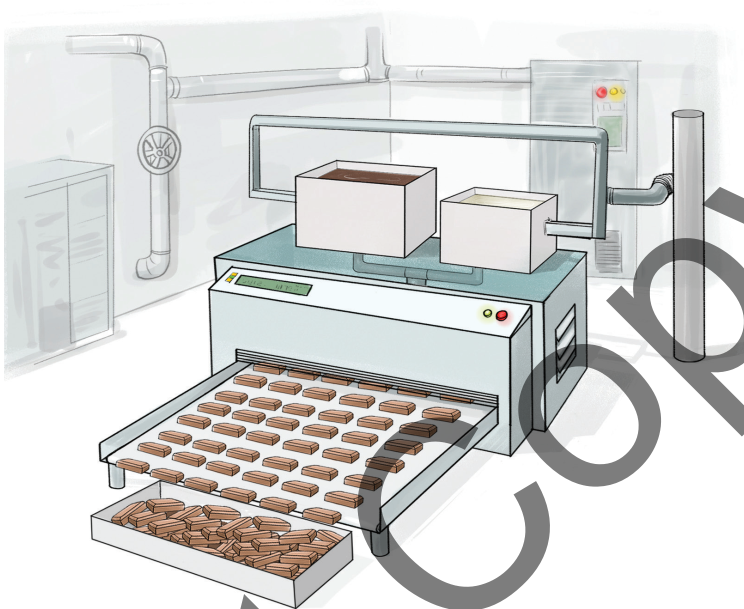
৪. নিচের ত্রিপদী রাশির ঘন নির্ণয় করো।

ক) $x + y + 3$ খ) $2x + 3y - z$ গ) $x^2 + 3x + 5$ ঘ) $xy + z - 3$

৫. বীজগাণিতিক নিয়ম ব্যবহার করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো:

ক) $x^3 + 1$ খ) $x^3 - 1$ গ) $x^6 - 729$ ঘ) $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$

৬. একটি চকোলেট তৈরির ফ্যাক্টরিতে 2 ফুট এবং 3 ফুট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট দুইটি ঘনক আকৃতির কন্টেইনারে পূর্ণকরে চকোলেটের কাঁচামাল রাখা আছে।



ক) কোনো কাঁচামাল নষ্ট না হলে, দুইটি কন্টেইনারের কাঁচামালকে একত্র করে $1'' \times 1'' \times 2''$ আকারের কতগুলো চকোলেট তৈরি করা যাবে?

খ) কোনো কাঁচামাল নষ্ট না হলে, দুইটি কন্টেইনারের কাঁচামালকে একত্র করে $5'' \times 7'' \times 1''$ আকারের কতগুলো চকোলেট বার তৈরি করা যাবে?

গ) $5'' \times 7'' \times 1''$ আকারের 1440টি চকোলেট বার তৈরি হলে কী পরিমাণ কাঁচামাল নষ্ট হয়েছে।

৭. লতার বাবার একটি মাছ চাষের খামার আছে। খামারে একটি পুকুর আছে যার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও পানির গভীরতা যথাক্রমে 50 মিটার, 40 মিটার এবং 5 মিটার। আয়তন ঠিক রেখে পানির গভীরতা 3 মিটার কমালে দৈর্ঘ্য কী পরিমাণ বাড়বে?

ক্ষুদ্র সঞ্চয়ে ভবিষ্যৎ গড়ি

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে

- সরল মুনাফা
- চক্রবৃদ্ধি মুনাফা
- লাভ ও ক্ষতি

ক্ষুদ্র সঞ্চয়ে ভবিষ্যৎ গড়ি

ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সঞ্চয়ের মাধ্যমে ভবিষ্যৎ উন্নয়নের জন্য আমাদের শিক্ষার্থীদের স্কুল ব্যাংকিং-এ উৎসাহিত করা হয়েছে। স্কুল ব্যাংকিং এর মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা ক্ষুদ্র পরিমাণের অর্থ ব্যাংকে জমা রেখে নিয়ম মাফিক মুনাফা পেতে পারে। বিভিন্ন সময়ের সঞ্চয়ের যথাযথ হিসাব রাখা এবং সঞ্চয় বিনিয়োগের মাধ্যমে মুনাফা নির্ণয় করার জন্য গাণিতিক হিসাব জানা গুরুত্বপূর্ণ। এই অধ্যায়ে আমরা সঞ্চয়ের হিসাব রাখা এবং মুনাফা নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচনা করব।

অষ্টম শ্রেণির শিক্ষার্থী শান্তা মঝে মধ্যে তার মা, বাবা ও নিকটাত্মীয়ের কাছ থেকে উপহার হিসেবে কিছু টাকা হাতে পায়। শান্তা চিন্তা করোল সে টাকা সঞ্চয় করবে, এবং এজন্য তার মায়ের সঙ্গে সে কাছেই একটি ব্যাংকে গেল একটি স্কুল ব্যাংকিং সঞ্চয়ী একাউন্ট খুলতে। ব্যাংক কর্মকর্তাকে শান্তা বলল, সে একটি একাউন্ট খুলতে চায় এবং সেখানে সে প্রতি মাসে ২০০ টাকা সঞ্চয় করতে চায়। ব্যাংক কর্মকর্তা জানালেন যে, হিসাব খুলতে তাকে প্রয়োজনীয় কাগজপত্র এবং প্রারম্ভিক ১০০ টাকা জমা দিয়ে একাউন্ট খুলতে হবে। সেইসঙ্গে প্রথম মাসের কিস্তি বাবদ আরও ২০০ টাকা জমা দিতে হবে। এরপর প্রতিমাসে কিস্তি ২০০ টাকা নিয়মিত জমা দিতে হবে। এই জমা টাকার উপরে ব্যাংক ৭% হারে মুনাফা যোগ হবে। এই মুনাফার হার পরিবর্তন হতে পারে। শান্তা ব্যাংকের নিয়ম মেনে একটি সঞ্চয়ী স্কুল ব্যাংকিং একাউন্ট খুলল।

তুমি কি জানো কিস্তি কী এবং ৭% হারে সরল মুনাফা কী? নির্দিষ্ট সময় পরপর যে টাকা জমা দিতে হবে, সেটিই হলো কিস্তি। ৭% হারে মুনাফার অর্থ হলো, ১০০ টাকা জমা রাখলে ১ বছর পর ব্যাংক তাকে ৭ টাকা মুনাফা দেবে।

তুমি কি বলতে পারবে,

১. প্রথম মাসে শান্তার মোট জমা কত?

২. দ্বিতীয় মাস শেষে শান্তার মোট জমা কত হবে?

৩. তৃতীয় মাস শেষে শান্তার মোট জমা কত হবে?

তোমার উত্তর এখানে লিখে রাখো।

একক কাজ

শান্তা তার নোটবুকে জমার পরিমাণের হিসাব রাখার জন্য নিচের ছকটি প্রস্তুত করল। তুমি শান্তার একবছরে মোট জমার হিসাবটা নিচের ছকে পূরণ করো।

ছক ৪.১

কিস্তি সংখ্যা	পরিমাণ (টাকা)	প্রারম্ভিক জমা (টাকা)	ক্রমসঞ্চিত মোট জমা (টাকা)
০	০	১০০	১০০
১	২০০	-	৩০০
২	২০০	-	৫০০
৩	২০০	-	৭০০
৪			
৫			
৬			
৭			
৮			
৯			
১০			
১১			
১২			

জোড়ায় কাজ

উপরের ছকটি পর্যবেক্ষণ করে শান্তার কিস্তি সংখ্যা এবং মোট জমার মধ্যে সম্পর্ক খুঁজে বের করে লেখো।

তোমার লেখা সম্পর্কটির সঙ্গে তোমার অন্যান্য সহপাঠীদের লেখা সম্পর্কটি মিলিয়ে দেখো। যদি না মিলে তাহলে বুঝতে পারবে কারও ভুল হয়েছে। এমতাবস্থায় নিজেরা আলোচনা করো এবং শ্রেণিশিক্ষককে দেখিয়ে সংশোধন করে নাও।

তুমি কি এই সম্পর্কটিকে একটি গাণিতিক সমীকরণে প্রকাশ করতে পারবে? যদি আমরা শান্তার কিস্তি সংখ্যাকে x, কিস্তির পরিমাণকে m, প্রারম্ভিক জমাকে c এবং মোট জমাকে y ধরে নেই, তাহলে আমরা লিখতে পারি,

$y = mx + c$ **[অর্থাৎ, মোট জমা = কিস্তির পরিমাণ × কিস্তির সংখ্যা + প্রারম্ভিক জমা]**

এই সমীকরণটি ব্যবহার করে শান্তার যে কোনো মাসের মোট সঞ্চয় বা জমার পরিমাণ নির্ণয় করা যায়। যেমন ১৪ –তম মাসে শান্তার মোট জমার পরিমাণ হবে,

$y = mx + c$ = ২০০ × ১৪ + ১০০ = ২৯০০ টাকা

এই সমীকরণ ব্যবহার করে শান্তার ১৬ মাস এবং ২৩ মাস পরে মোট কত সঞ্চয় হবে, তা নিচের ছকে লেখো।

কিস্তি সংখ্যা	মোট জমার পরিমাণ (টাকা)
১৬	
২৩	

সরল মুনাফা (Simple Interest)

ব্যাংকে সঞ্চয়ী হিসাব খুললে নির্দিষ্ট হারে মুনাফা পাওয়া যায়। যেহেতু শান্তা নিয়মিত ব্যাংকে সঞ্চয় করে, তাই সে ব্যাংক থেকে মুনাফা পাবে। মুনাফা দুই ধরনের হতে পারে, সরল মুনাফা (simple interest) এবং চক্রবৃদ্ধি (compound) মুনাফা। আমরা প্রথমে সরল মুনাফা, তারপর চক্রবৃদ্ধি মুনাফার হিসাব করব এবং দেখব কোন ধরনের মুনাফাতে শান্তা অধিক লাভ পেতে পারে।

আমরা শান্তার জমা বা সঞ্চয়ের হিসাব করেছি। এবার তার ব্যাংক থেকে প্রাপ্য সরল মুনাফার হিসাব করব। প্রথমে আমরা মুনাফা নির্ণয়ের কিছু নিয়ম জেনে নেব, তারপর শান্তার মুনাফার হিসাব করব।

শুধু প্রারম্ভিক মূলধনের উপর যে মুনাফা দেওয়া হয়, তাকে **সরল মুনাফা** বলে। যেমন– কেউ যদি ১০০টাকা ব্যাংকে জমা রাখে এবং ঐ ব্যাংক তাকে ৭% হারে সরল মুনাফা দেয়, তবে এক বছরে পর তার মুনাফা হবে ৭ টাকা, দুই বছর পর হবে ১৪ টাকা এবং তিন বছর পর মুনাফা হবে ২১ টাকা। অর্থাৎ প্রতি ১০০ টাকায় প্রতিবছর একই হারে মুনাফা পাবে। এটিই সরল মুনাফা।

সাধারণত, সঞ্চয়ী একাউন্টে জমা টাকার পরিমানের উপর বাংকগুলো নির্দিষ্ট সময়ের জন্য নির্দিষ্ট পরিমাণ মুনাফা দিয়ে থাকে। মুনাফার পরিমাণ বিভিন্ন ব্যাংকে ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। যদি কোনো ব্যাংক বলে যে তারা ৭% মুনাফা দেয়, তাহলে এর অর্থ দাঁড়াবে, ১০০ টাকা জমা করলে তারা এক বছরে ৭ টাকা মুনাফা দিবে। নিচে কিছু উদাহরণ দেওয়া হলো।

উদাহরণ ১

৭% হার ৩০০০ টাকার ৬ বছরের মুনাফা কত?

সমাধান

১০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা = ৭ টাকা

$\therefore$ ১ টাকার ১ বছরের মুনাফা = $\frac{৭}{১০০}$ টাকা

$\therefore$ ৩০০০ টাকার ৬ বছরের মুনাফা = $\frac{৭}{১০০} \times ৩০০০ \times ৬$ টাকা

= ১২৬০ টাকা

এখানে

মুনাফার হার = $\frac{৭}{১০০}$

আসল = ৩০০০ টাকা

সময়কাল = ৬ বছর

জোড়ায় কাজ

উপরের সমাধানটি পর্যবেক্ষণ করো। তোমরা কি মুনাফা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে মুনাফার হার, আসল ও সময়কালের মধ্যে কোন সম্পর্ক খুঁজে পাও? তোমার সহপাঠীর সঙ্গে আলোচনা করে সম্পর্কটি নিচে লেখো।

সরল মুনাফার বীজগাণিতিক সূত্র

উপরের উদাহরণ ১ থেকে আমরা দেখেছি, মুনাফার হার = ৭% $= \frac{৭}{১০০}$

আসল = ৩০০০ টাকা

সময় = ৬ বছর

এবং ৩০০০ টাকার ৬ বছরের মোট মুনাফা = $\frac{৭}{১০০} \times$ ৩০০০ $\times$ ৬ টাকা

অর্থাৎ, **মোট মুনাফা = মুনাফার হার × আসল × সময়কাল**

যদি আমরা ধরে নিই, মুনাফার হার r, আসল P, সময়কাল n এবং মোট মুনাফা I, তবে উপরের সম্পর্কটিকে লিখতে পারি,

$$I = Prn$$

উপরোক্ত বীজগাণিতিক সূত্র থেকে আমরা আরও কিছু সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারি,

মুনাফার হার $r = \frac{I}{Pn}$

আসল $P = \frac{I}{rn}$

সময়কাল $n = \frac{I}{Pr}$

উপরের সূত্র ব্যবহার করে উদাহরণস্বরূপ নিচে কিছু সমস্যার সমাধান করে দেওয়া হলো।

উদাহরণ ২

১২% হারে ১৫০০০ টাকার ৩ বছরের মুনাফা কত?

সমাধান

মুনাফার সূত্র থেকে আমরা জানি, $I = Prn$

$\therefore$ মুনাফা $I = \frac{১২}{১০০} \times$ ১৫০০০ $\times$ ৩ টাকা

= ৫৪০০ টাকা

এখানে,

মুনাফার হার, r = ১২% $= \frac{১২}{১০০}$

আসল, P = ১৫০০০ টাকা

সময়, n = ৩ বছর

উদাহরণ ৩

রিনা ব্যাংকে ১১% সরল মুনাফা হারে টাকা জমা রেখে ৫ বছর পর ২২০০ টাকা মুনাফা পেল। সে কত টাকা জমা রেখেছিল?

সমাধান

মুনাফার সূত্র থেকে আমরা জানি, $I = Prn$

সমাধান : (নিজে করো)

এখানে,

মুনাফার হার, r = ১১% = $\frac{১১}{১০০}$

মুনাফা, I = ২২০০ টাকা

সময়, n = ৫ বছর

উদাহরণ ৪

৪২০০ টাকার ৪ বছরের মুনাফা ২১০০ টাকা হলে মুনাফার হার কত?

সমাধান : (নিজে করো)

এখানে,

আসল, P =

মুনাফা, I =

সময়, n =

উদাহরণ ৫

১১% হারে ৪৪০০০ টাকার কত বছরের মুনাফা ১২১০০ টাকা হবে?

সমাধান : (নিজে করো)

এখানে,

উপরের উদাহরণ থেকে সহজেই সরল মুনাফার হিসাব করা যায়। কিন্তু শান্তার সঞ্চয়ের ভিত্তিতে একবছরে কত সরল মুনাফা পাওয়া যাবে?
লক্ষ করো শান্তার প্রথম কিস্তির ২০০ টাকা ১ বছর বা ১২ মাস ব্যাংকে জমা থেকেছে, কিন্তু দ্বিতীয় কিস্তির ২০০ টাকা ১১ মাস ব্যাংকে জমা থেকেছে। এভাবে পরের কিস্তির টাকাগুলো আরও কম সময় ব্যাংকে জমা থেকেছে। ব্যাংকের সরল মুনাফার হার ৭% হলে শান্তা কি তার মোট সঞ্চয়ের পুরো টাকার উপর ৭% মুনাফা পাবে? কী মনে হয় তোমাদের? তোমার উত্তর যুক্তিসহ লেখো।

জোড়ায় কাজ

শান্তার এক বছরের সরল মুনাফার হিসাব নিচের ছকে আংশিক করে দেওয়া আছে। তোমার একজন সহপাঠীর সঙ্গে জোড়ায় আলোচনা করে নিচের ছকের ফাঁকা অংশগুলো পূরণ করো।

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

ছক ৪.২				
মাসের ক্রম	মাসে জমা টাকা (আসল P)	মুনাফার হার r=৭%	সময়কাল n মাস	আসলের বিপরীতে মুনাফা, I = Prn
১	২০০	$\frac{৭}{১০০}$	১২ মাস	মুনাফা =২০০ × $\frac{৭}{১০০}$ × $\frac{১২}{১২}$ = ১৪.০০ টাকা
২	২০০	$\frac{৭}{১০০}$	১১ মাস বা $\frac{১১}{১২}$ বছর	মুনাফা = ২০০ × $\frac{৭}{১০০}$ × $\frac{১১}{১২}$ = ১২.৮৩ টাকা
৩	২০০	$\frac{৭}{১০০}$	১০ মাস বা $\frac{১০}{১২}$ বছর	মুনাফা =২০০ × $\frac{৭}{১০০}$ × $\frac{১০}{১২}$ =... ... ... টাকা
৪	২০০	$\frac{৭}{১০০}$	৯ মাস বা ...... বছর	মুনাফা = ২০০ × $\frac{৭}{১০০}$ × — =
৫	২০০	$\frac{৭}{১০০}$		
৬	২০০			
৭	২০০			
৮	২০০			
৯	২০০			
১০	২০০			
১১	২০০			
১২	২০০			
মোট প্রাপ্য মুনাফা				... ...

উপরের ছকের ফাঁকা ঘরগুলো পূরণ করে তোমরা মোট প্রাপ্য মুনাফা নির্ণয় করতে পার। তোমাদের এই কাজ সহপাঠীদের সঙ্গে মিলিয়ে নাও এবং শিক্ষককে দেখিয়ে প্রয়োজনীয় সংশোধন করে নাও।

একক কাজ

সুমীর মা প্রতিমাসে একটি ব্যাংকে তার সঞ্চয়ী হিসেবে ১৫০০ টাকা করে জমা রাখে। তিনি ৪ মাস নিয়মিত জমা দিলেন, কিন্তু বিশেষ প্রয়োজনে তিনি পঞ্চম মাস শেষ হওয়ার আগেই সকল টাকা তুলে নিলেন। সরল মুনাফার হার ১০% হলে তিনি ব্যাংক থেকে মোট কত টাকা পেলেন?

চক্রবৃদ্ধি মুনাফা (Compound Interest)

সরল মুনাফায় আমরা দেখেছি যে, যত বছরই সঞ্চয় করা হোক না কেন, শুধুমাত্র প্রারম্ভিক মূলধনের উপর মুনাফা নির্ণয় করা হয়। কিন্তু চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয়ে প্রতিবছর বা মেয়াদান্তে যে মুনাফা পাওয়া যায়, তা পূর্বের মূলধনের সঙ্গে যোগ করে নতুন মূলধন নির্ধারণ করা হয় এবং এই নতুন মূলধনের উপর পরবর্তী মেয়াদের মুনাফা নির্ণয় করা হয়। প্রত্যেক সময়কাল শেষে মূলধনের সঙ্গে মুনাফা যোগ করে নতুন মূলধন হিসেব করে সর্বশেষ যে মুনাফা পাওয়া যায় তাকে **চক্রবৃদ্ধি মুনাফা** বলে। চক্রবৃদ্ধি মুনাফাকে c প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। একটি নির্দিষ্ট সময়কাল শেষে নতুন মূলধনকে **চক্রবৃদ্ধি মূলধন** বলে। চক্রবৃদ্ধি মূলধনকে A প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যে মূলধন নিয়ে শুরু করা হয় তাকে প্রারম্ভিক মূলধন বলে। প্রারম্ভিক মূলধনকে P প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। নিচের উদাহরণ থেকে চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচনা করা হলো।

উদাহরণ ৬

৬% হারে ৩০০০ টাকার ৩ বছরের চক্রবৃদ্ধি মূলধন এবং চক্রবৃদ্ধি মুনাফা কত?

সমাধান

১০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা = ৬ টাকা

$\therefore$ ১ টাকার ১ বছরের মুনাফা = $\frac{৬}{১০০}$ টাকা

$\therefore$ ৩০০০ টাকার ১ বছরের মুনাফা = ৩০০০ x $\frac{৬}{১০০}$ টাকা

= ১৮০ টাকা

$\therefore$ ১ বছর পরে চক্রবৃদ্ধি মূলধন = প্রারম্ভিক মূলধন + মুনাফা

= (৩০০০ + ১৮০) টাকা

= ৩০০০ + $\left(৩০০০ \times \frac{৬}{১০০}\right)$ টাকা

= ৩০০০ x $\left(১ + \frac{৬}{১০০}\right)$ টাকা।

যেহেতু আমরা পূর্বে পেয়েছি,

১৮০ = ৩০০০ x $\frac{৬}{১০০}$

$\therefore$ প্রথম বছর পর চক্রবৃদ্ধি মূলধনের সমীকরণ,

$A = P \times (১ + r)$.... ... (১)

এখন দ্বিতীয় বছরে,

৩১৮০ টাকার ১ বছরের মুনাফা $= ৩১৮০ \times \frac{৬}{১০০}$ টাকা

$\therefore$ ২ বছর পরে চক্রবৃদ্ধি মূলধন $= ৩১৮০ + \left(৩১৮০ \times \frac{৬}{১০০}\right)$ টাকা

$= ৩১৮০ \times \left(১ + \frac{৬}{১০০}\right)$ টাকা

$= \left(৩০০০ \times \left(১ + \frac{৬}{১০০}\right)\right) \times \left(১ + \frac{৬}{১০০}\right)$ টাকা

$= ৩০০০ \times \left(১ + \frac{৬}{১০০}\right)^{২}$ টাকা ... (২)

$= ৩৩৭০.৮০$ টাকা

প্রারম্ভিক মূলধন,
$P = ৩০০০$ টাকা
মুনাফার হার, $r = \frac{৬}{১০০}$
চক্রবৃদ্ধি মূলধন, A

চক্রবৃদ্ধি মূলধন =পূর্বের মূলধন + মুনাফা
যেহেতু পূর্বে আমরা পেয়েছি,

$৩১৮০ = ৩০০০ \times \left(১ + \frac{৬}{১০০}\right)$

$\therefore$ (২) নং অংশ থেকে লেখা যায়, দ্বিতীয় বছর পর চক্রবৃদ্ধি মূলধনের সমীকরণ,

$$A = P \times (১ + r)^{২} \quad ... (৩)$$

প্রারম্ভিক মূলধন, $P = ৩০০০$ টাকা

মুনাফার হার, $r = \frac{৬}{১০০}$

চক্রবৃদ্ধি মূলধন, A

একইভাবে তৃতীয় বছরে,

৩৩৭০.৮০ টাকার ১ বছরের মুনাফা $= ৩৩৭০.৮০ \times \frac{৬}{১০০}$ টাকা

$\therefore$ ৩ বছর পরে চক্রবৃদ্ধি মূলধন $= ৩৩৭০.৮০ + \left(৩৩৭০.৮০ \times \frac{৬}{১০০}\right)$ টাকা

$= ৩৩৭০.৮০ \times \left(১ + \frac{৬}{১০০}\right)$ টাকা

$= ৩০০০ \times \left(১ + \frac{৬}{১০০}\right)^{২} \times \left(১ + \frac{৬}{১০০}\right)$ টাকা

$= ৩০০০ \times \left(১ + \frac{৬}{১০০}\right)^{৩}$ টাকা ... (৪)

$= ৩৫৭৩.০৫$ টাকা

তাহলে তিনবছর পর চক্রবৃদ্ধি মূলধন ৩৫৭৩.০৫ টাকা

এবং মুনাফা, $৩৫৭৩.০৫ - ৩০০০ = ৫৭৩.০৫$ টাকা

$\therefore$ (৪) নং অংশ থেকে লেখা যায়, তৃতীয় বছর পর চক্রবৃদ্ধি মূলধনের সমীকরণ,

$$A = P \times (১ + r)^{৩} \quad ... (৫)$$

এখন, উপরে বর্ণিত প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বছরের চক্রবৃদ্ধি মূলধন নির্ণয়ের (১), (৩) ও (৫) নম্বর সমীকরণ তিনটির প্যাটার্ন ভালো করে লক্ষ করো। তুমি কি A, P, r এবং সময়কালের সংখ্যার (n) পরিবর্তনের মধ্যে কোনো সম্পর্ক খুঁজে পাও? তোমার উত্তর প্রদত্ত ছকে লেখো।

তোমরা নিশ্চয় লক্ষ করেছ যে তিনটি সমীকরণই দেখতে প্রায়ই একই, শুধু সূচকের মানে পরিবর্তন হয়েছে এবং এই সূচকের মানের সঙ্গে n এর একটি সম্পর্ক আছে। সমীকরণগুলো পর্যবেক্ষণ করে তুমি কি উদাহরণ ৬ অনুসারে পঞ্চম বছরের চক্রবৃদ্ধি মূলধন নির্ণয় করতে পারবে? নিচের ফাঁকা অংশে এর সমাধান করে শিক্ষককে দেখাও।

চক্রবৃদ্ধি মূলধন এবং চক্রবৃদ্ধি মুনাফার সূত্র

উপরের কাজগুলো সম্পন্ন করলে তোমরা দেখবে যে, প্রারম্ভিক মূলধন P, মুনাফার হার r, সময় n, চক্রবৃদ্ধি মূলধন A এবং মুনাফা C হলে,

চক্রবৃদ্ধি মূলধন, $A = P(১ + r)^n$

এবং মুনাফা, $C = A - P$

$= P(১ + r)^n - P$ [যেহেতু, $A = P(১ + r)^n$]

$= P[(১ + r)^n - ১]$

চক্রবৃদ্ধি মূলধন নির্ণয়

উদাহরণ ৭

৭% হারে ২০ হাজার টাকার ৫ বছরের চক্রবৃদ্ধি মূলধন কত?

সমাধান : (সমাধানের বাকি অংশ নিজে করো)

চক্রবৃদ্ধি মূলধন, $A = P(১ + r)^n$

এখানে,
প্রারম্ভিক মূলধন, P = ২০০০০ টাকা
মুনাফার হার, r = ৭% = $\frac{৭}{১০০}$ = ০.০৭
সময়কাল, n = ৫

প্রারম্ভিক মূলধন নির্ণয়

উদাহরণ ৮

প্রারম্ভিক মূলধন কত হলে ১৩% হারে ৫ বছরের চক্রবৃদ্ধি মূলধন ২০০০০ টাকা হবে?

সমাধান: (সমাধানের বাকি অংশ নিজে করো)

চক্রবৃদ্ধি মূলধন, $A = P(১ + r)^n$

$$\therefore P = \frac{A}{(১ + r)^n}$$

এখানে,
চক্রবৃদ্ধি মূলধন, A = ২০০০০ টাকা
মুনাফার হার, r = ১৩% = ০.১৩
সময়কাল, n = ৫

চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয়

উদাহরণ ৯

৯% হারে ১৫০০০ টাকার ৭ বছরের চক্রবৃদ্ধি মুনাফা কত?

সমাধান: (সমাধানের বাকি অংশ নিজে করো)

চক্রবৃদ্ধি মুনাফা, $C = P[(১ + r)^{n} - ১]$

এখানে,
প্রারম্ভিক মূলধন, $P =$
মুনাফার হার, $r =$
সময়কাল, $n =$

নির্দিষ্ট সময়কালে চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয়

মুনাফা সাধারণত বাৎসরিক হারে দেওয়া হয়ে থাকে। কিন্তু চক্রবৃদ্ধি মুনাফা প্রদানের সময়কাল এক বছর নাও হতে পারে; এক বছরের কম বা বছরের ভগ্নাংশ হতে পারে। সেক্ষেত্রে মুনাফার হারকে সময়কাল অনুসারে বছরের আনুপাতিক অংশে পরিবর্তন করে নিতে হয়। একই সঙ্গে সময়কালকে বছরের আনুপাতিক হারে পরিবর্তন করতে হয়। নিচের উদাহরণ থেকে এই ধারণাটি ব্যাখ্যা করা হলো।

উদাহরণ ১০

৮% মুনাফা হারে ৫০০ টাকার ৩ মাস অন্তর চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় ২ বছরের চক্রবৃদ্ধি মূলধন কত?

এক্ষেত্রে, মুনাফা নির্ণয় করতে ৮%কে ৩ মাসের বাৎসরিক আনুপাতিক হারে পরিবর্তন করে নিতে হবে।

৩ মাস = $\frac{৩}{১২}$ বা $\frac{১}{৪}$ বছর

এক বছরে মুনাফা প্রাপ্তির সংখ্যা ১২ ÷ ৩ = ৪ বার

সুতরাং ২ বছরে মুনাফা প্রাপ্তির সংখ্যা ৪ × ২ = ৮ বার, অর্থাৎ এখানে n = ৮

৩ মাস বা $\frac{১}{৪}$ বছরে চক্রবৃদ্ধি মুনাফার হার $r = \frac{১}{৪} \times ৮\% = ২\% = ০.০২$

সুতরাং এক্ষেত্রে চক্রবৃদ্ধি মূলধন, $A = P (১ + r)^n$

$$= ৫০০ \times (১ + ০.০২)^৮$$

$$= ৫০০ \times ১.১৭৬$$

$$= ৫৮৫.৮৩ \text{ টাকা (প্রায়)}$$

উদাহরণ ১১

৮% মুনাফা হারে ৫০ হাজার টাকার ৬ মাস অন্তর চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় ৫ বছরের মোট চক্রবৃদ্ধি মুনাফা কত?

সমাধান : ৬ মাস অন্তর ১ বছরে মুনাফা পাবে ২ বার

$\therefore$ ৫ বছরে মুনাফা পাবে $৫ \times ২ = ১০$

এখানে,

প্রারম্ভিক মূলধন, $P = ৫০০০০$ টাকা

মুনাফার হার, $r = \frac{৬}{১২} \times ৮\% = ০.০৪$

৫ বছরে সময়কাল, $n = ১০$

চক্রবৃদ্ধি মুনাফা, $C = P [(১ + r)^n - ১]$

$$= ৫০০০০ [(১ + ০.০৪)^{১০} - ১]$$

বাকি অংশ নিজে করো

সরল ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার তুলনা

পূর্বে সরল মুনাফার হারে আমরা শান্তার এক বছরের সঞ্চয়ের মোট মুনাফার হিসাব করেছিলাম। এবার চক্রবৃদ্ধি হারে আমরা শান্তার মোট মুনাফার হিসাব করব এবং দেখব কোন পদ্ধতিতে শান্তা অধিক মুনাফা পেতে পারে। মনে করো, শান্তা যে ব্যাংকে সঞ্চয় করে, সেখানে বাৎসরিক ৭% হারে প্রতি মাসে চক্রবৃদ্ধি মুনাফা প্রদান করা হয়। তাহলে শান্তা বছর শেষে মোট কত মুনাফা পাবে?

যেহেতু প্রতি মাসে চক্রবৃদ্ধি মুনাফা প্রদান করা হবে, তাই শান্তার প্রথম কিস্তির ২০০ টাকা এক বছরে ১২ বার চক্রবৃদ্ধি হারে মুনাফা পাবে। দ্বিতীয় কিস্তির ২০০ টাকা ১১ বার চক্রবৃদ্ধি হারে মুনাফা পাবে। অন্যান্য কিস্তিগুলোর মুনাফা একইভাবে হিসাব করা হবে।

$$\text{এখানে, বাৎসরিক ৭\% হারের মাসিক চক্রবৃদ্ধি হার, } r = \frac{১}{১২} \times \frac{৭}{১০০} = \frac{৭}{১২০০} = ০.০০৫৮$$

শান্তার এক বছরের চক্রবৃদ্ধি মুনাফার হিসাব ছক ৪.৩ আংশিক করে দেওয়া আছে। ছকের ফাঁকা অংশগুলো পূরণ করো।

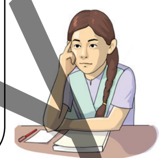
ছক ৪.৩

মাসের ক্রম	মাসে জমা টাকা (আসল P)	মুনাফার হার r =৭%	সময়কাল n (মাস)	চক্রবৃদ্ধি হারে মুনাফা, $C = P[(১ + r)^n - ১]$
১	২০০	০.০০৫৮	১২	মুনাফা $= ২০০ [(১ + ০.০০৫৮)^{১২} - ১] = ১৪.৩৭$ টাকা
২	২০০	০.০০৫৮	১১	মুনাফা $= ২০০ [(১ + ০.০০৫৮)^{১১} - ১] = ১৩.১৪$ টাকা
৩	২০০		১০	
৪	২০০		৯	
৫	২০০		৮	
৬	২০০		৭	মুনাফা $= ২০০ [(১ + ০.০০৫৮)^{৭} - ১] = ৮.২৬$ টাকা
৭	২০০		৬	
৮	২০০		৫	
৯	২০০		৪	
১০	২০০		৩	মুনাফা $= ২০০ [(১ + ০.০০৫৮)^{৩} - ১] = ৩.৫০$ টাকা
১১	২০০		২	
১২	২০০		১	
মোট প্রাপ্য চক্রবৃদ্ধি মুনাফা				... ... টাকা

শান্তার এক বছরের চক্রবৃদ্ধি মুনাফা কত পেল? এখানে লেখো

আবার, শান্তার এক বছরের সরল মুনাফা কত ছিল? এখানে লেখো

সুতরাং কোন ধরনের পদ্ধতিতে শান্তা অধিক মুনাফা পেতে পারে? এবং কেন? জোড়ায় আলোচনা করে লেখো।



ক্ষুদ্র ব্যবসায় লাভ-ক্ষতি (Profit-Loss in Small Business)

ক্ষুদ্র সঞ্চয় কাজে লাগিয়ে বিভিন্ন ক্ষুদ্র ব্যবসা করে আয় করা যায়। ব্যবসায়ের আয় যথাযথভাবে হিসাব করে তা থেকে লাভ ও ক্ষতির হিসাব করতে পারাটা জরুরি। তোমরা কি বলতে পারবে লাভ ও ক্ষতি কী? ক্রয়মূল্য ও বিক্রয়মূল্যের সঙ্গে লাভ ও ক্ষতির সম্পর্ক কী? তোমাদের উত্তর নিচে লেখো।

লাভ কী? ____________________

ক্ষতি কী? ____________________

কোনো ব্যবসায় যে পরিমাণ অর্থ বিনিয়োগ করা হয় ঐ পরিমাণ অর্থকে **মূলধন** বলে। কোনো পণ্য ক্রয়ের জন্য প্রয়োজনীয় মূলধনকে ঐ পন্যের **ক্রয়মূল্য** হিসেবে নির্ধারণ করা হয় এবং কোনো পণ্য যে মূল্যে বিক্রয় করা হয় তাকে ঐ পণ্যের **বিক্রয়মূল্য** বলে। কোনো পণ্যের ক্রয়মূল্যের চেয়ে বিক্রয়মূল্য বেশি হলে, ঐ পণ্য বিক্রয়ের ফলে **লাভ** হয় এবং কোনো পণ্যের ক্রয়মূল্যের চেয়ে বিক্রয়মূল্য কম হলে, ঐ পণ্য বিক্রয়ের ফলে **ক্ষতি** বা **লোকসান** হয়। অর্থাৎ

লাভ = বিক্রয়মূল্য – ক্রয়মূল্য

ক্ষতি = ক্রয়মূল্য – বিক্রয়মূল্য

প্রতি ১০০ টাকা ক্রয়মূল্যের বিপরীতে যে টাকা লাভ হয়, তাকে **শতকরা লাভ** বলে। এসো লাভ ও ক্ষতির বিষয়গুলো নিচের কিছু উদাহরণ থেকে বুঝে নিই।

উদাহরণ ১

শান্তার বাবা একজন ব্যবসায়ী। তিনি তার ব্যবসায় ৩০ হাজার টাকা বিনিয়োগ করে কিছু পণ্য কিনলেন এবং মাস শেষে ৪০ হাজার টাকায় তা বিক্রয় করলেন। তার শতকরা লাভ কত?

সমাধান

এখানে, শান্তার বাবার বিনিয়োগ বা মূলধন = ৩০০০০ টাকা এবং প্রাপ্ত অর্থ = ৪০০০০ টাকা।

এবার বলো তো, ব্যবসায় শান্তার বাবার লাভ হয়েছে? নাকি ক্ষতি হয়েছে? তার মোট পরিমাণ কত? তোমার উত্তর নিচে লেখো।

তুমি নিশ্চয়ই দেখেছ, শান্তার বাবার ১০০০০ টাকা লাভ হয়েছে। অর্থাৎ,

$$\text{৩০০০০ টাকায় লাভ} = \text{১০০০০ টাকা}$$

$$\text{১ টাকায় লাভ} = \frac{\text{১০০০০}}{\text{৩০০০০}} \text{ টাকা}$$

$$\text{১০০ টাকায় লাভ} = \frac{\text{১০০০০} \times \text{১০০}}{\text{৩০০০০}} \text{ টাকা}$$

$$= \text{৩৩}\frac{\text{১}}{\text{৩}} \text{ টাকা}$$

সুতরাং শান্তার বাবার লাভ ৩৩ $\frac{\text{১}}{\text{৩}}$ %

নিজে করো

সমস্যা : একজন ঘড়ি বিক্রেতা ৩৫০ টাকা দরে ৭০০টি ঘড়ি ক্রয় করে সকল ঘড়ি ২ লক্ষ টাকায় বিক্রয় করলে তার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হবে?
তুমি কি বলতে পারবে, সে মোট কত টাকার ঘড়ি কিনেছিল? তোমার উত্তর এখানে লেখো।

এখন, সকল ঘড়ি ২ লক্ষ টাকায় বিক্রয় করলে তার লাভ নাকি ক্ষতি হবে? তোমার উত্তরের শতকরা হার নির্ণয় করো।

একক কাজ

শান্তার মা একজন গৃহিণী। বাড়ির কাজের পাশাপাশি তিনি ছাগল পালন করার পরিকল্পনা করলেন। এজন্য তিনি তার স্বামীর কাছে থেকে ৫০০০ টাকা এবং তার এক বোনের কাছে থেকে ১০০০০ টাকা ধার করলেন। শর্ত হলো যে, ছাগল বিক্রয়ের মুনাফা থেকে খরচের টাকা বাদ দেওয়ার পর মুনাফার অর্ধেক অংশ শান্তার মা

পাবেন এবং মুনাফার বাকি অর্ধেক অংশ স্বামী এবং বোন তাদের প্রদেয় টাকার আনুপাতিক হারে পাবেন। শান্তার মা ১৫০০০ টাকায় ৫টি ছাগলের বাচ্চা ক্রয় করে কিছুদিন লালনপালন করলেন। লালনপালন বাবদ তার ১০০০০ টাকা খরচ হলো। ছাগলগুলো বড়ো হবার পর তিনি গ্রামের হাটে ৫৫০০০ টাকায় বিক্রয় করলেন। ছাগল বিক্রয়ের মুনাফার টাকার অংশ কে কত পাবে?

অনুশীলনী

১. রইস ৩৫০০০ টাকা ৩ বছরের জন্য ব্যাংকে জমা রাখল। যদি সরল মুনাফার হার ৭% হয়, তবে ৩ বছর পরে রইছের কত টাকা মুনাফা হবে?

২. জেবিন তার বন্ধুর সঙ্গে ব্যবসার শেয়ার থেকে ৬ মাসে ২৩০০০ টাকা মুনাফা পেল। মুনাফার হার ৮% হলে, ঐ ব্যবসায় জেবিনের মূলধন কত?

৩. শিমুল ৮০০০০ টাকা কোনো ব্যবসায় খাটিয়ে ২ বছরে ১৭৫০০০ টাকা মুনাফা পেল। শিমুলের শতকরা কত টাকা মুনাফা হলো?

৪. জনি ৫০০০০ টাকা ব্যাংকে জমা রাখল। মুনাফার হার ৭.৫% হলে কত বছরে জনি ৩০০০০০ টাকা মুনাফা পাবে?

৫. ১০% মুনাফা হারে ৩ লক্ষ টাকা কত বছরের মুনাফা-আসলে দ্বিগুণ হবে?

৬. ৫০০০০ টাকা ৭ বছরে মুনাফা-আসলে ১২০০০০ টাকা হলে মুনাফার হার কত?

৭. কোনো মূলধন ৫ বছরে যে মুনাফা হারে মুনাফা-আসলে দ্বিগুণ হয়, সেই মুনাফা হারে ৮ বছরে মুনাফা-আসলে ২৬০০০ টাকা হবে। মূলধন কত?

৮. ৯% হারে ২০০০ টাকার ১০ বছরের মুনাফা, ৮% হারে ৫০০০ টাকার কত বছরের মুনাফার সমান?

৯. ১৩% হারে ২৫০০০ টাকার ৬ বছরের মুনাফা, কত মুনাফা হারে ২০০০০ টাকার ৮ বছরের মুনাফার সমান?

১০. তানজিলা ৩০ হাজার টাকা ৫ বছরের জন্য এবং রায়হান ২০ হাজার টাকা ৭ বছরের জন্য ব্যাংকে জমা রাখল। যদি উভয়ের জন্য মুনাফা হার ৮% হয়, তবে কে এবং কত বেশি লাভবান হবে?

১১. শরিফা ৭০ হাজার টাকা ৮% মুনাফা হারে এবং জহির ৫০ হাজার টাকা ১২% মুনাফা হারে ব্যাংকে জমা রাখল। ৬ বছর পরে কে এবং কত বেশি লাভবান হবে?

১২. ৮% মুনাফা হারে ৭৫ হাজার টাকার ৫ বছরের –

(ক) সরল মুনাফা কত?

(খ) চক্রবৃদ্ধি মুনাফা কত?

(গ) সরল মুনাফা এবং চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য কত?

(ঘ) ৪ মাস অন্তর মুনাফাভিত্তিক চক্রবৃদ্ধি মুনাফা কত?

(ঙ) ৩ মাস অন্তর মুনাফাভিত্তিক চক্রবৃদ্ধি মুনাফা কত?

১৩. জুবায়ের এবং রিয়া উভয়ে ৭% হারে ৬ বছরের জন্য ২৫ হাজার টাকা করে ব্যাংকে জমা রাখল। যদি জুবায়ের সরল হারে এবং রিয়া চক্রবৃদ্ধি হারে মুনাফা পায়, তবে কে বেশি লাভবান হবে এবং ৬ বছর পরে মুনাফা-আসলে কার কত টাকা হবে?

১৪. আহসান এবং তাহসিনা উভয়ে ১১% মুনাফা হারে ৫ বছরের জন্য ২০ হাজার টাকা করে ব্যাংকে জমা রাখল। যদি আহসান ৬ মাস অন্তর মুনাফাভিত্তিক এবং তাহসিনা ৪ মাস অন্তর মুনাফাভিত্তিক চক্রবৃদ্ধি হারে মুনাফা পায়, তবে কে বেশি লাভবান হবে এবং ৫ বছর পরে কার কত টাকা মূলধন হবে?

১৫. এক ব্যক্তি একটি ঋণদান সংস্থা থেকে ১১% চক্রবৃদ্ধি হারে প্রতি মাস অন্তর মুনাফা ভিত্তিক ৫০ হাজার টাকা ঋণ নিলেন। যদি ঐ ব্যক্তি প্রতি মাসে ১২০০০ টাকা করে ঋণ পরিশোধ করে, তবে

(ক) ১ মাস পরে আর কত টাকা ঋণ থাকবে?

(খ) ২ মাস পরে আর কত টাকা ঋণ থাকবে?

(গ) ৩ মাস পরে আর কত টাকা ঋণ থাকবে?

১৬. করিম ৯% চক্রবৃদ্ধি মুনাফা হারে ৫ বছরের জন্য ৫০ হাজার টাকা এবং মরিয়ম ৭% চক্রবৃদ্ধি মুনাফা হারে ৫ বছরের জন্য ৮০ হাজার টাকা ব্যাংকে জমা রাখল। ব্যাংক থেকে কার বেশি আয় হবে এবং কত টাকা বেশি আয় হবে?

১৭. তাহসিনা ৩৫০ টাকা দরে ৮টি মুরগি ক্রয় করে মোট ২৫০০ টাকায় বিক্রয় করলে কত লাভ বা ক্ষতি হবে? তাহসিনার মূলধন কত?

১৮. একজন মাছচাষি তার পুকুরে ৫০০০ টাকার পোনামাছ ছাড়লেন। সে মাছের খাবারের জন্য ৬০০০০ টাকা এবং মাছচাষের শ্রমিকের জন্য ২৫০০০ টাকা খরচ করোল। ঐ মাছচাষির মূলধন কত? যদি তিনি তার পুকুরের মাছ ২০০০০০ টাকা বিক্রি করেন, তবে তার কত টাকা লাভ হবে।

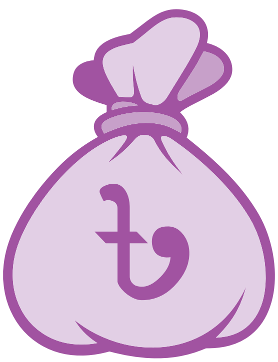
১৯. একজন কৃষক এক দোকানে ৪০ কেজি ধান দিয়ে ২০ কেজি চাল, ৫ কেজি আটা এবং ১ কেজি ডাল নিল। যদি এক কেজি ধানের দাম ১২ টাকা, এক কেজি চালের দাম ১৬ টাকা, এক কেজি আটার দাম ১৮ টাকা এবং এক কেজি ডালের দাম ২৮ টাকা হয়, তবে কৃষকের কত টাকা লাভ বা ক্ষতি হলো?

২০. একজন ফলবিক্রেতা ১৫০০০ টাকা দিয়ে ১২০ শত লিচু ক্রয় করলেন। যাতায়াতের সময় ৬শত লিচু নষ্ট হয়ে গেল। বাকি প্রতি শত লিচু কত টাকা দরে বিক্রয় করলে তার মোট ২০০০ টাকা লাভ হবে?

২১. একটি সাইকেল ৫,০০০ টাকা দিয়ে ক্রয় করে ১২% লাভে বিক্রয় করলে মোট কত টাকা লাভ হবে? সাইকেলটির বিক্রয়মূল্য কত?

২২. একজন ব্যবসায়ী তার পণ্য ৫% ক্ষতিতে বিক্রয় করলেন। যদি তিনি ১২৩০ টাকা বেশি দামে বিক্রি করতে পারতেন তবে তার ৫% লাভ হতো, ব্যবসায়ীর পণ্যের ক্রয়মূল্য কত?

২৩. উৎপন্নকারী, পাইকারী বিক্রেতা এবং খুচরা বিক্রেতা সকলে ৫% লাভে একটি পণ্য বিক্রয় করেন। একজন খরিদ্দার পণ্যটি খুচরা বিক্রেতার কাছ থেকে ১০৫০ টাকা দিয়ে ক্রয় করলে এর উৎপন্ন খরচ কত?



জমির নকশায় ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে

- নিয়মিত ও অনিয়মিত আকৃতি
- সমকোণী ত্রিভুজের বৈশিষ্ট্য
- পিথাগোরাসের উপপাদ্য
- পরিমাপে কম্পাসের ব্যবহার
- ত্রিভুজে অনুপাতের ব্যবহার
- চতুর্ভুজের বৈশিষ্ট্য ও গঠন
- বিদ্যালয়ের জমির নকশা পরিমাপের কাজ

জমির নকশায় ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ

আমরা চারপাশে খেলার মাঠ, ধানখেত কিংবা বাড়ির সামনের বাগানের আকৃতি পর্যবেক্ষণ করি। ভালোমতো লক্ষ করলে দেখবে যে আমাদের চারপাশে বিভিন্ন আকৃতির জমি রয়েছে। মনে করো, কোনো জমির আকৃতি যদি সামান্তরিক কিংবা ট্রাপিজিয়ামের মতো হয় তাহলে তোমরা পরিমাপ করতে পারবে কি? একটি ট্রাপিজিয়াম আকৃতির জমি কীভাবে পরিমাপ করবে তা নিচের বক্সে লেখো।

এইবার চিত্র ৫.১ লক্ষ করো, এখানে একটি এলাকার বিভিন্ন জমির আকৃতিগুলোকে দেখা যাচ্ছে। এখানে কী কী আকৃতি দেখতে পাচ্ছ পর্যবেক্ষণ করো এবং খাতায় এঁকে রাখো। একটু চিন্তা করে বলো এই বিভিন্ন আকৃতির জমি আমরা কীভাবে পরিমাপ করতে পারি? তোমার সহপাঠী এবং প্রয়োজনে শিক্ষকের সঙ্গে আলোচনা করে নিচের বক্সে তোমার মতামত লেখো।

চিত্র -৫.১

ট্রাপিজিয়াম, রম্বস, ত্রিভুজ কিংবা বৃত্তাকার জমি আমরা খুব সহজেই পরিমাপ করতে পারি। এ পরিমাপের ক্ষেত্রে কখনো গ্রিড ব্যবহার করি আবার কখনো সূত্র ব্যবহার করি। কিন্তু ছবিতে যে আকৃতিগুলো দেখতে পেলাম এমন আকৃতি পরিমাপের ক্ষেত্রে আমরা কী করব? এ অভিজ্ঞতাটির আলোচনায় এবং বিভিন্ন কাজে অংশগ্রহণের মাধ্যমে তোমরা এই আকৃতিগুলোকে খুব সহজে চিহ্নিত করে পরিমাপ করার বিভিন্ন পদ্ধতি শিখবে।

আমার বিদ্যালয়ের জমি দেখতে কেমন?

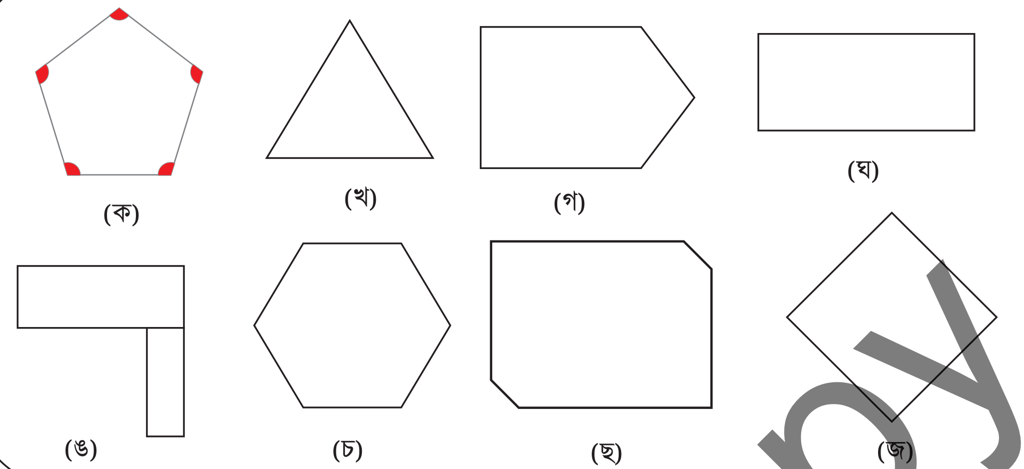
তোমাদের একটি কাজ দিতে চাই। কাজটি হলো তোমাদের বিদ্যালয়ের জমিটির আকৃতি সম্পর্কে ধারণা লাভ করবে এবং জমিটি মেপে দেখবে। বিদ্যালয়ের চারপাশ ভালোমতো পর্যবেক্ষণ করো। এই পর্যবেক্ষণের উপর ভিত্তি করে জমিটির একটি নকশা তৈরি করো। নিচের বক্সে ঐ নকশাটি এঁকে রাখো।

আমার বিদ্যালয়ের জমির নকশা আঁকি।

তোমরা বিদ্যালয়ের জমির নকশা তৈরি করেছ। আকৃতিগুলো সঠিকভাবে শনাক্ত করা জমি পরিমাপ করার জন্য খুব গুরুত্বপূর্ণ একটি ধাপ। এখন এসো বিভিন্ন আকৃতি শনাক্ত করার একটি কাজ করি।

একক কাজ

প্রদত্ত বক্সে বিভিন্ন আকৃতি দেওয়া আছে। প্রদত্ত আকৃতিগুলোর প্রতিটি বাহু এবং প্রতিটি কোণ পরিমাপ করে তাদের মধ্যে কী ধরনের মিল দেখতে পাচ্ছ? সমজাতীয়/একই বৈশিষ্ট্যযুক্ত আকৃতিগুলোকে শনাক্ত করো।



যে আকৃতিগুলোকে সমজাতীয় হিসেবে চিহ্নিত করলে তার কারণ লেখো।

____

____

____

____

____

একক কাজটির ক্ষেত্রে,

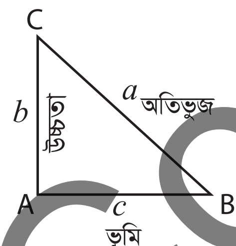
যে আকৃতিগুলোর বাহুগুলো এবং কোণগুলো পরস্পর সমান সেগুলো হলো [ ]

যে আকৃতিগুলোর বাহুগুলো এবং কোণগুলো পরস্পর সমান নয়, সেগুলো হলো [ ]

যখন কোনো আকৃতির বাহুগুলো এবং কোণগুলো পরস্পর সমান হয় আমরা তাকে নিয়মিত আকৃতি (Regular shape) হিসেবে চিহ্নিত করি। আবার যখন কোনো আকৃতির বাহু এবং কোণগুলোর ক্ষেত্রে যে কোনো একটি অসমান থাকে সেই আকৃতিকে অনিয়মিত আকৃতি হিসেবে (Irregular Shape) চিহ্নিত করি।

নিয়মিত এবং অনিয়মিত আকৃতিগুলো সঠিকভাবে শনাক্ত করার কাজটি পরিমাপ প্রক্রিয়ার জন্য খুব গুরুত্বপূর্ণ একটি ধাপ। এখন চিন্তা করে দেখো তোমাদের বিদ্যালয়ের জমির নকশাটি কি নিয়মিত নাকি অনিয়মিত আকৃতি? অনিয়মিত জমি পরিমাপের ক্ষেত্রে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের বিভিন্ন ধারণা প্রয়োগ করে পরিমাপ করা সম্ভব। ইতোমধ্যে তোমরা ট্রাপিজিয়াম পরিমাপের ক্ষেত্রে এই কাজটি করেছ। অভিজ্ঞতার এই অংশে তোমরা ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ সম্পর্কে আরও বিস্তারিত জানতে পারবে এবং এই ধারণাগুলো প্রয়োগ করে বিদ্যালয়ের জমির নকশা পরিমাপ করতে পারবে।

প্রথমেই এসো যাচাই করে নিই ত্রিভুজ সম্পর্কিত কোন ধারণাগুলো তোমরা ইতোমধ্যে শিখেছ। পূর্ববর্তী শ্রেণিতে তোমরা সূক্ষ্মকোণী, স্থূলকোণী এবং সমকোণী ত্রিভুজ সম্পর্কে বিস্তারিত জেনেছ। এসো নিচের ছকে কুইজের মাধ্যমে সমকোণী ত্রিভুজের বৈশিষ্ট্যগুলো খুঁজে বের করার চেষ্টা করি।



চিত্র ৫.২

কুইজ

- সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ ______________ ।
- সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের নাম ______________ ।
- ভূ-সমান্তরালভাবে যে বাহুটি থাকে তাকে ___________ বলা হয়।
- সমকোণের বিপরীত বাহুটিকে __________ বলা হয় ।
- চিত্র থেকে সমকোণটি চিহ্নিত করে পাশের বক্সে লেখো। $\boxed{}$
- সূত্রের সাহায্যে চিত্রে প্রদত্ত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ______________ ।

এসো তাহলে সমকোণী ত্রিভুজের আরেকটি গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য খুঁজে বের করি।

একক কাজ

প্রত্যেকে নিজ নিজ খাতায় বিভিন্ন আকারের ৫টি সমকোণী ত্রিভুজ আঁকো । ত্রিভুজগুলোর নিচে ১ নং ত্রিভুজ, ২ নং ত্রিভুজ,... , ৫ নং ত্রিভুজ নাম দাও। ত্রিভুজের বাহুগুলোর উপর বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করো। অতঃপর

ত্রিভুজের বাহুগুলো মেপে ছক ৫.১ পূরণ করো। ৫টি ত্রিভুজের বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করে ক্ষেত্রফলগুলোর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয়ের চেষ্টা করো।

ছক ৫.১

ত্রিভুজ নং	ভূমি	উচ্চতা	অতিভুজ	ভূমির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল	উচ্চতার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল	অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল	ক্ষেত্রফলগুলোর মধ্যে সম্পর্ক

ক্ষেত্রফলগুলোর মধ্যে কোনো সম্পর্ক খুঁজে পেলে কি? তোমরা যদি সঠিকভাবে বাহুর দৈর্ঘ্য পরিমাপ করো তবে নিশ্চয়ই একটি সম্পর্ক পেয়ে থাকবে। তবে বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের পরিমাপ অতি সূক্ষ্মভাবে নির্ণয় করতে না পারার কারণে সম্পর্ক নির্ণয়ে আসন্ন মান ব্যবহার করতে হতে পারে। সম্পর্কটি বক্সে দেওয়া হলো। তোমার অনুসন্ধানের ফলাফলের সঙ্গে মিলিয়ে দেখো।

> সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

এখন আমরা যদি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ c এবং অপর দুই বাহু a ও b ধরি, তবে আমরা লিখতে পারি,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

জেনে রাখো

খ্রিষ্টপূর্ব ষষ্ঠ শতাব্দীতে গ্রিক দার্শনিক ও গণিতবিদ পিথাগোরাস সমকোণী ত্রিভুজের এই বিশেষ বৈশিষ্ট্যটি নিরূপণ করেন । এজন্য এটিকে পিথাগোরাসের উপপাদ্য বলা হয়। তাঁর নামে এই উপপাদ্যের নামকরণ করা হলেও আরও প্রাচীনকাল থেকে এই উপপাদ্যটির ব্যবহার খুঁজে পাওয়া যায়। এর ব্যবহার দেখা যায় ব্যাবিলিয়নদের ব্যবহৃত বস্তুতে। আবার জানা যায় যে, খ্রিষ্টপূর্ব ৮০০ থেকে ৪০০ এর মধ্যে ভারতীয় উপমহাদেশের অনেক গণিতবিদও এই উপপাদ্যটি বিভিন্নভাবে ব্যাখ্যা করেছেন।

ধারণা করা হয়ে থাকে পিথাগোরাস বর্তমান তুরস্কের কাছাকাছি সামোস দ্বীপে জন্মগ্রহণ করেছিলেন। সংখ্যাতত্ত্ব, ত্রিমাত্রিক এবং ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত জ্যামিতিতে তাঁর অবদান খুঁজে পাওয়া যায়। পিথাগোরাস বিভিন্ন সংখ্যার সম্পর্ক নির্ণয়ে উৎসুক ছিলেন এবং যার প্রতিফলন হলো পিথাগোরাসের উপপাদ্য।

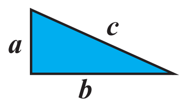
গ্রিক গণিতবিদ পিথাগোরাস

পিথাগোরাসের উপপাদ্যের ক্ষেত্রে আরেকটি মজার ঘটনা হলো **"পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী"**। যখন একটি সমকোণী ত্রিভুজের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য পূর্ণসংখ্যা হয় তখন আমরা পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী পাই। যে তিনটি পূর্ণ সংখ্যা সমকোণী ত্রিভুজের এই বৈশিষ্ট্য মেনে চলে তাদেরকে পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী বলা হয়। যেমন, $(3, 4, 5)$ ও $(5, 12, 13)$ দুটি পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী। এরকম আরও অনেক পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী তোমরা খুঁজে বের করতে পার।

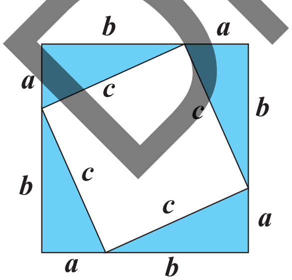
এবার তোমাদের একটি প্রশ্ন করি। আমরা যদি ইচ্ছাকৃতভাবে কোনো সমকোণী ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা পূর্ণ সংখ্যায় নিই তবে সবসময় অতিভুজ পূর্ণ সংখ্যা হতে পারে কি? অথবা যে কোনো দুটি বাহুর দৈর্ঘ্য পূর্ণ সংখ্যায় নিলে তৃতীয় বাহুটির দৈর্ঘ্য পূর্ণ সংখ্যায় হবে কি?

একক কর্মপত্র—বিকল্প উপায়ে "পিথাগোরাসের উপপাদ্য"

খুব সহজে কাগজ কেটে এই সম্পর্কটি প্রমাণ করা যায়। এক্ষেত্রে 4টি একই মাপের সমকোণী ত্রিভুজ নাও ।



ধরো, প্রত্যেকটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য c এবং অপর দুই বাহুর দৈর্ঘ্য a ও b । এখন 4টি ত্রিভুজকে নিচের চিত্রের মতো করে $a+b$ বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের মধ্যে সাজাও (চিত্র: ৫.৩)।



চিত্র-৫.৩

এক্ষেত্রে $a+b$ বাহুবিশিষ্ট বড়ো বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $=(a+b)^2$

4টি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= 4 \times \frac{1}{2} \times a \times b = 2ab$

ফাঁকা অংশের ক্ষেত্রফল $= c^2$ [যেহেতু ফাঁকা অংশটি একটি বর্গক্ষেত্র]

যেহেতু বড়ো বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল, 4টি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল এবং ফাঁকা অংশের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান, সুতরাং প্রমাণ করো যে,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

কিন্তু এমন কি হতে পারে যে, ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান নয় অথচ ত্রিভুজটি সমকোণী।

একক কাজ

নিজের ইচ্ছামতো তিনটি করে বাহুর দৈর্ঘ্য a, b ও c নিয়ে ত্রিভুজ গঠন করো যেন $a^2 \neq b^2 + c^2$, $b^2 \neq c^2 + a^2$, এবং $c^2 \neq a^2 + b^2$ হয়। বাহু তিনটি দিয়ে ত্রিভুজ গঠন করে কোণগুলো পরিমাপ করো। ত্রিভুজের যে কোনো একটি কোণ সমকোণ হয়েছে কি? ত্রিভুজটি কী ধরনের ত্রিভুজ হয়েছে?

যদি $a^2 > b^2 + c^2$ অথবা, $b^2 > c^2 + a^2$ অথবা, $c^2 > a^2 + b^2$ হয় তবে ত্রিভুজটি স্থূলকোণী হবে। অন্যথায় ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী হবে।

এখান থেকে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে, ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর বর্গের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর বর্গের সমান না হলে ত্রিভুজটি সমকোণী হয় না। **অর্থাৎ ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর বর্গের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর বর্গের সমান হলে ত্রিভুজটি সমকোণী হবে। একে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য বলে।**

আকৃতি পরিমাপের বিভিন্ন কৌশল আয়ত্ত করি

বিভিন্ন তথ্যের ভিত্তিতে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ গঠনে আমাদের অঙ্কনের প্রয়োজন হয়। আমরা এই কাজগুলো কাগজ ভাঁজ করে পূর্ববর্তী শ্রেণিতে শিখেছি। আবার নিচে বর্ণিত একক কাজটির ক্ষেত্রে তোমরা খুব সহজেই চাঁদা ব্যবহার করে কাজটি সম্পন্ন করতে পার। কিন্তু যদি তোমার কাছে চাঁদা না থাকে তখন কী করবে?

একক কাজ

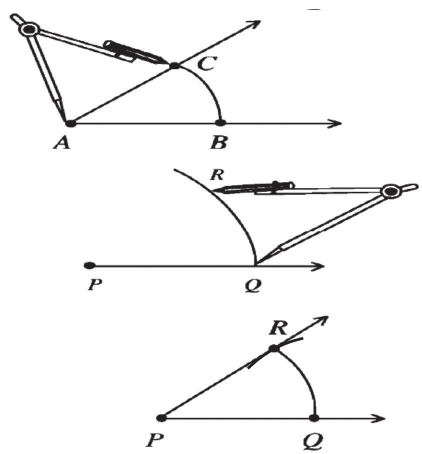
মনে করো, একটি জমি বা স্থাপনার নকশা তৈরির ক্ষেত্রে তোমাকে নিচের কাজগুলো করতে হবে।

- একটি কোণের ($\angle A$) সমান করে আরেকটি কোণ তৈরি করা
- যে কোণটি আঁকলে তাকে সমদ্বিখণ্ডিত করা
- একটি রেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে লম্ব অঙ্কন করা।

পরিমাপে কম্পাস ব্যবহারের উপায়

ক) ধরো, তুমি একটি কোণ $\angle A$ এর সমান করে একটি কোণ অঙ্কন করতে চাও।

- সেক্ষেত্রে যে কোনো একটি রশ্মি PQ নাও। এখন A বিন্দুতে পেন্সিল কম্পাসের কাঁটা স্থাপন করে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করো (চিত্র:৫.৪)।
- বৃত্তচাপটি রশ্মিদ্বয়কে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। একই ব্যাসার্ধ নিয়ে P কে কেন্দ্র করে আরেকটি বৃত্তচাপ আঁকো।



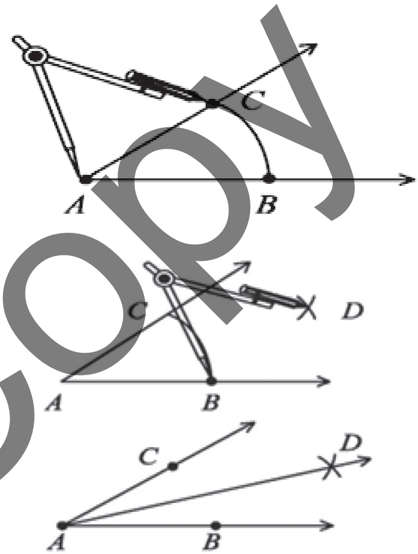
চিত্র: ৫.৪

বৃত্তচাপটি Q বিন্দুতে ছেদ করে। এবার Q কে কেন্দ্র করে BC এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে আরেকটি বৃত্তচাপ আঁকো।

- এই বৃত্তচাপটি আগের বৃত্তচাপকে R বিন্দুতে ছেদ করে। PR যোগ করে বর্ধিত করো।

সঠিকতা যাচাই–এবার চাঁদা ব্যবহার করে মেপে দেখো উৎপন্ন ∠RPQ কোণটি ∠BAC কোণের সমান হয়েছে কি না।

খ) আবার ধরো, একটি কোণ ∠A কে সমদ্বিখণ্ডিত করতে চাও।

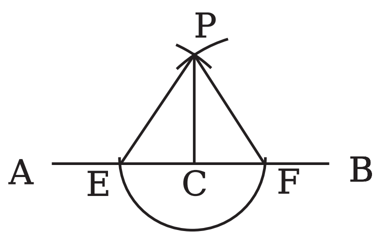


এক্ষেত্রে A কে কেন্দ্র করে যে কোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকো। ধরো, বৃত্তচাপটি রশ্মিদ্বয়কে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে (চিত্র :৫.৫)।

- এখন B কে কেন্দ্র করে BC এর অর্ধেকের চেয়ে বেশি ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকো। আবার C কে কেন্দ্র করে একই ব্যাসার্ধ নিয়ে আরেকটি বৃত্তচাপ আঁকো।
- ধরো, বৃত্তচাপ দুটি পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। A, D যোগ করো। এবার মেপে দেখো ∠BAD ও ∠CAD কোণদ্বয় সমান হয়েছে কি না।
- সঠিকতা যাচাই– কাগজ ভাঁজ করেও তুমি দেখতে পার AD এর উভয় পাশের কোণদ্বয় সমান কি না।

গ) আবার ধরো, তুমি কোনো একটি রেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে লম্ব অঙ্কন করতে চাও। রূলার ও কম্পাস ব্যবহার করে তুমি তা করতে পার।

- প্রথমে তুমি যে কোনো একটি রেখাংশ AB নাও। অতঃপর তুমি AB রেখাংশের উপর যে কোনো একটি বিন্দু C নাও (চিত্র : ৫.৬)।
- এই C বিন্দুতে তুমি লম্ব অঙ্কন করবে। C কে কেন্দ্র করে একটি বৃত্তচাপ আঁকো। ধরো, বৃত্তচাপটি AB কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখন E ও F কে কেন্দ্র করে EF এর অর্ধেকের চেয়ে বেশি ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকো। ধরো, বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। P, C যোগ করো। এখন এই PC, AB এর উপর লম্ব।



চিত্র: ৫.৬

- সঠিকতা যাচাই– এখন এই PC, AB এর উপর লম্ব হয়েছে কি না তা তুমি সহজেই PC এর উভয় পাশের কোণ মেপে দেখতে পার। তবে এটি যুক্তি দিয়েও প্রমাণ করা যায়। সেক্ষেত্রে P,E ও P,F যোগ করে ΔPEC এবং ΔPFC গঠন করো। এই ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে অঙ্কন অনুসারে $EC = FC$, $PE = PF$ এবং PC উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু। অর্থাৎ একটি ত্রিভুজের তিন বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান। সুতরাং আমরা বলতে পারি, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। সুতরাং $\angle PCE = \angle PCF = 1$ সমকোণ। [যেহেতু $\angle ECF$ = এক সরলকোণ= দুই সমকোণ।]

  সুতরাং PC, AB **এর উপর লম্ব।**

এখন বলো তো এমন কোনো উপায় কি আছে যেখানে উপরের পরিমাপগুলো কম্পাস কিংবা চাঁদা ব্যবহার না করেও তোমরা করতে পারবে? তোমার আইডিয়া এখানে লেখো।

ত্রিভুজে অনুপাতের ব্যবহার

অভিজ্ঞতার এই অংশে তোমরা বিভিন্ন আকৃতি তৈরি ও পরিমাপ করার ক্ষেত্রে ত্রিভুজের অনুপাত সম্পর্কিত কিছু গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য অনুসন্ধান করবে। যে কোনো একটি আকৃতির ত্রিভুজ চিহ্নিত করে ত্রিভুজের অনুপাত সম্পর্কিত এই বৈশিষ্ট্যগুলো কাজে লাগিয়ে ঐ আকৃতিটি পরিমাপ করা সম্ভব। আবার একটি ত্রিভুজের সঙ্গে আরেকটি ত্রিভুজের তুলনা করে পরিমাপ প্রক্রিয়ার অনেক সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা সম্ভব।

জোড়ায় কাজ

আমরা ইতোমধ্যে জেনেছি,

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা। প্রত্যেক দল 3 cm ভূমি বিশিষ্ট পাঁচটি করে ভিন্ন ভিন্ন উচ্চতার ত্রিভুজ আঁকো। প্রতিটি ত্রিভুজের উচ্চতা পরিমাপ করে পাশের ছকটি পূরণ করো। তোমরা কি ক্ষেত্রফল ও উচ্চতার মধ্যে কোনো সম্পর্ক খুঁজে পেলে?

ছক-৫.২

ক্রমিক নং	ভূমি	উচ্চতা	ক্ষেত্রফল	ক্ষেত্রফল/ উচ্চতা
১.	3 cm			
২.	3 cm			
৩.	3 cm			
৪.	3 cm			
৫.	3 cm			

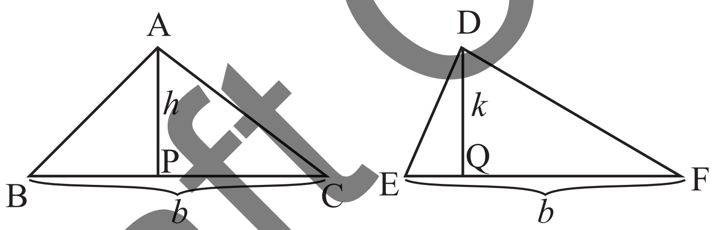
এখান থেকে তোমরা কী সিদ্ধান্ত নিলে তা নিচের বক্সে লেখো।

জোড়ায় কাজের সিদ্ধান্ত –

তোমরা যদি ভূমি ঠিক রেখে ত্রিভুজগুলোর ক্ষেত্রফল ও উচ্চতা পরিমাপ করো তাহলে দেখবে যে ত্রিভুজগুলোর ক্ষেত্রে নিচের বিবৃতিটি সত্য।

দুটি ত্রিভুজের ভূমি সমান হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উচ্চতার সমানুপাতিক।

বিকল্প প্রমাণ– ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্রকে কাজে লাগিয়ে উপরের বিবৃতিটি প্রমাণ করার আরেকটি বিকল্প উপায় নিচে বর্ণিত হলো।



চিত্র: ৫.৭

আমরা যদি ধরে নিই যে, ΔABC এবং ΔDEF এর একই ভূমি b এবং তাদের উচ্চতা যথাক্রমে h এবং k (চিত্র :৫.৭), তাহলে আমরা পাই,

$$\frac{\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta DEF \text{ এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\frac{1}{2}\times b\times h}{\frac{1}{2}\times b\times k} = \frac{h}{k} = \frac{\Delta ABC \text{ এর উচ্চতা}}{\Delta DEF \text{ এর উচ্চতা}}$$

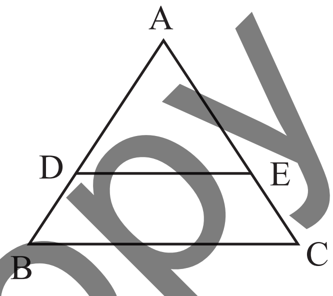
বা, $$\frac{\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{ABC \text{ এর উচ্চতা}} = \frac{\Delta DEF \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta DEF \text{ এর উচ্চতা}}$$

সুতরাং, আমরা পেলাম যে, ত্রিভুজের ভূমি সমান হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল উচ্চতার সমানুপাতিক।

একক কর্মপত্র– একই উচ্চতা ও ভিন্ন ভিন্ন ভূমিবিশিষ্ট পাঁচটি ত্রিভুজ এঁকে পরিমাপ করে দেখাও যে, ত্রিভুজের উচ্চতা সমান হলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ভূমির সমানুপাতিক। প্রাপ্ত সিদ্ধান্তের ক্ষেত্রে বিকল্প প্রমাণ করে দেখাও।

আমরা এখানে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সঙ্গে ভূমি এবং উচ্চতার আনুপাতিক সম্পর্ক পেয়েছি। ত্রিভুজের আরও কিছু বৈশিষ্ট্য আছে যেখানে আনুপাতিক সম্পর্ক পাওয়া যায়। চলো আমরা নিচের কাজটি করে দেখি।

- প্রত্যেকে যে কোনো একটি ত্রিভুজ আঁকো। ধরো, ত্রিভুজটি ΔABC ।
- কাগজ ভাঁজ করে বা অন্য কোনো উপায়ে BC এর সমান্তরাল করে DE সমান্তরাল রেখা আঁকো (চিত্র : ৫.৮)।
- ধরো, সমান্তরাল রেখাটি AB ও AC রেখাকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে ছক ৫.৩ পূরণ করো।



চিত্র: ৫.৮

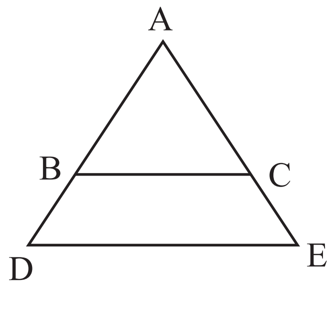
ছক-৫.৩		
দৈর্ঘ্য পরিমাপে একই একক ব্যবহার করো		অনুপাত
AD=	DB=	AD/DB =
AE=	CE=	AE/CE =

ফলাফলগুলো নিয়ে নিজেদের মধ্যে আলোচনা করে সিদ্ধান্ত নাও। দেখো তো তোমাদের সিদ্ধান্ত নিচের মতো কি না?

ত্রিভুজের যেকোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।

এবার বিষয়টি নিয়ে একটু অন্যভাবে চিন্তা করো। প্রত্যেকে যে কোনো মাপের একটি করে ত্রিভুজ ΔABC আঁকো ।

AB ও AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করো যেন BC ও DE সমান্তরাল হয়। পূর্বের মতো ছক বানিয়ে হিসেব করে সিদ্ধান্ত খাতায় লেখো। উপরের প্রাপ্ত সিদ্ধান্তগুলো আমরা নিচের মতো করে লিখতে পারি।



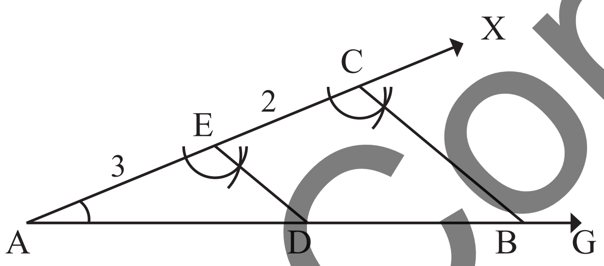
চিত্র: ৫.৮

ত্রিভুজের যে কোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে বা এদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।

দলগত কাজ

প্রমাণ করো যে, কোনো সরলরেখা একটি ত্রিভুজের দুই বাহুকে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করলে উক্ত সরলরেখা ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।

উপরোক্ত ধারণা ব্যবহার করে আমরা যে কোনো দৈর্ঘ্যের রেখাংশকে একটি নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত করতে পারি। ধরো, 9 cm. দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশকে 3 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করতে চাও। এক্ষেত্রে নিচের কাজটি করে সহজেই এটি করা যেতে পারে।



চিত্র : ৫.১০

- প্রথমে যে কোনো একটি রশ্মি AG আঁকো। AG থেকে AB=9 cm. অংশ কেটে নাও।
- A বিন্দুতে যে কোনো মাপের কোণ $\angle BAX$ অঙ্কন করো (চিত্র : ৫.১০) ।
- AX থেকে AE = 3 cm. অংশ কেটে নাও এবং EX থেকে EC = 2 cm. অংশ কেটে নাও।
- B ও C যোগ করো। এখন BC এর সমান্তরাল করে E বিন্দু দিয়ে ED সমান্তরাল রেখা অঙ্কন করো যা AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

এবার, AD ও BD পরিমাপ করে $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2}$ এর সত্যতা নিশ্চিত করো। যেহেতু, AD + BD = AB = 9 cm. এবং AD : BD = 3 : 2, সুতরাং 9 cm. দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশ 3 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলো।

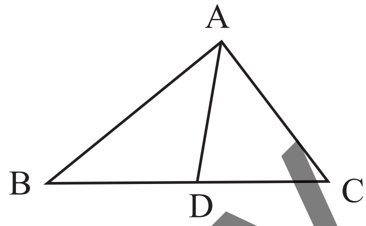
একক কাজ

মনে করো, তোমার কাছে একটি ফিতা বা দড়ি আছে। ফিতা বা দড়িটি যেকোনো দৈর্ঘ্যের হতে পারে। ঐ ফিতা বা দড়িটিকে 5 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করো।

এবার চলো ত্রিভুজের অনুপাত সংক্রান্ত আরেকটি বৈশিষ্ট্য অনুসন্ধান করি।

দলগত কাজ

তিনজন করে দল গঠন করো। প্রত্যেকে যে কোনো মাপের একটি করে ত্রিভুজ আঁকো (চিত্র-৫.১১)। কাগজ ভাঁজ করে বা অন্য কোনো উপায়ে কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক AD আঁকো। দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে ছকটি পূরণ করো।



চিত্র : ৫.১১

ছক: ৫.৪		
দৈর্ঘ্য পরিমাপে একই একক ব্যবহার করো		অনুপাত
BD=	DC=	BD/DC=
AB=	AC=	AB/AC=

প্রাপ্ত ফলাফলগুলো নিয়ে দলের মধ্যে আলোচনা করে সিদ্ধান্ত নাও। তোমাদের দলের সিদ্ধান্ত অন্যদের সঙ্গে মিলাও। প্রাপ্ত সিদ্ধান্ত নিচের বিবৃতির সঙ্গে মিলিয়ে দেখো।

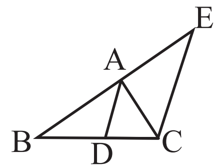
> ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

একক কাজ

১. ΔABC আকৃতির একটি জমির AB ও AC বাহুকে DE রেখা এমনভাবে ছেদ করে যেন $AB : BD = AC : CE$ হয়। ΔDBC আকৃতির জমির ক্ষেত্রফল 10 বর্গমিটার হলে ΔBEC এর ক্ষেত্রফল কত?

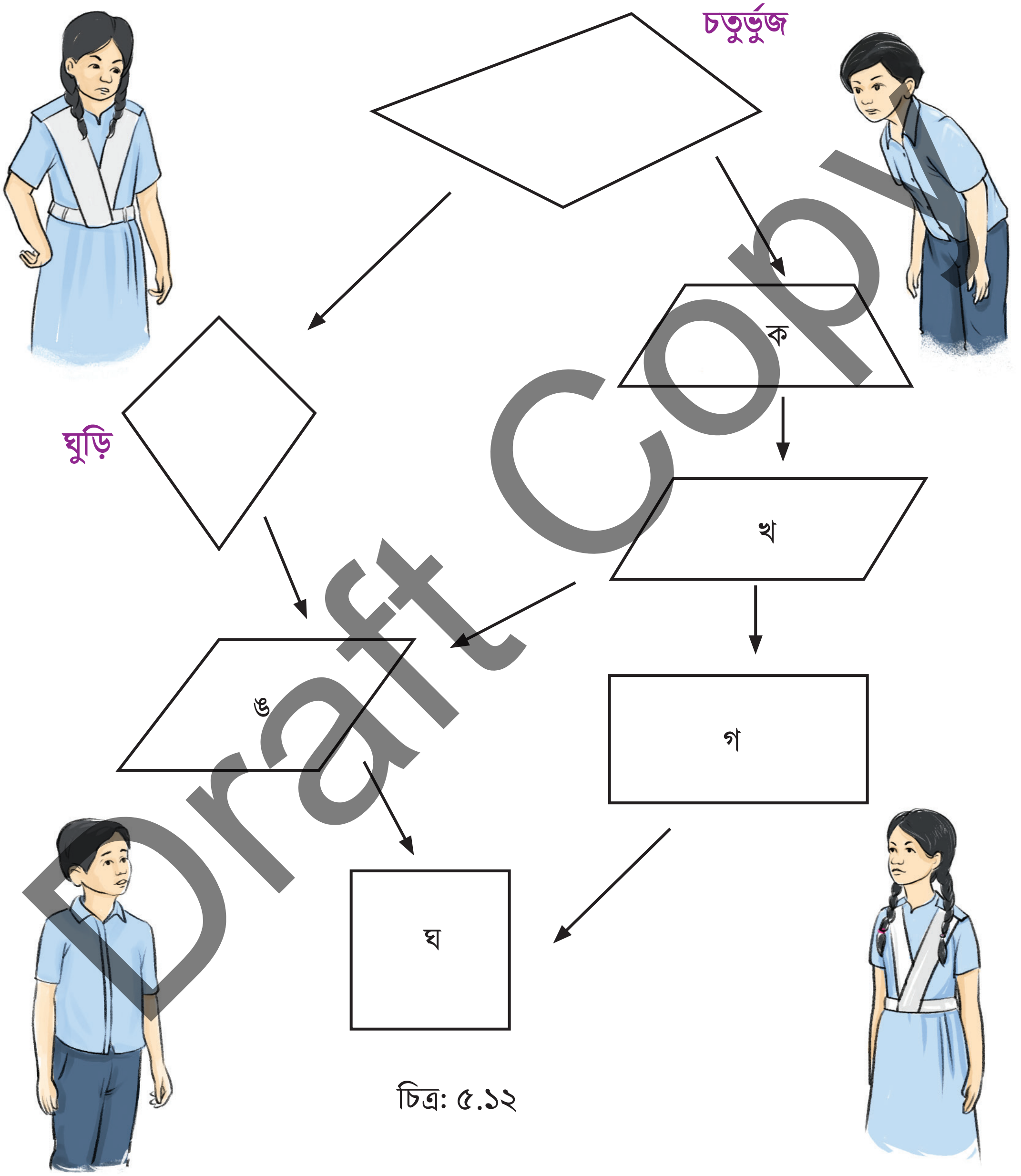
২. ΔABC আকৃতির একটি জমির BC বাহুর সমান্তরাল DE রেখা AB ও AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে। $AE : CE = 3 : 2$ এবং $BD = 2$ m হলে AB বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

৩. ΔABC-এ $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। CE, AD এর সমান্তরাল এবং $BD : DC = 3 : 2$ । $AE = 10$ m হলে AB এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।



নানা রকম চতুর্ভুজ খুঁজি

জমির নকশা তৈরির ক্ষেত্রে কিংবা জমি পরিমাপের ক্ষেত্রে ত্রিভুজের পাশাপাশি চতুর্ভুজের ধারণা নানাভাবে সাহায্য করে। আমরা বিভিন্ন ধরনের চতুর্ভুজ সম্পর্কে পূর্ববর্তী শ্রেণিতে জেনেছি। নিচের চিত্রটি লক্ষ করো।



চিত্র: ৫.১২

চিত্র : ৫.১২ এ বর্ণিত বিভিন্ন চতুর্ভুজকে ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করে ছক ৫.৫ পূরণ করো :

ছক-৫.৫		
আকৃতি	আকৃতির নাম	সিদ্ধান্তের সপক্ষে যুক্তি
ক		
খ		
গ		
ঘ		
ঙ		

তোমরা নিশ্চয় লক্ষ করে থাকবে যে, আমরা একটি নতুন চিত্র দেখলাম। চিত্রটির নাম হলো ঘুড়ি। ঘুড়ির দুই জোড়া সন্নিহিত বাহু সমান। আবার ঘুড়ির দুই জোড়া সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্যগুলো অর্থাৎ চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান হলে আমরা তাকে বলব রম্বস। ফলে সকল রম্বসকে আমরা ঘুড়ি বলতে পারি। একইভাবে অন্য আকৃতিগুলোর মধ্যেও কিছু সম্পর্ক খুঁজে বের করা সম্ভব। নিচের ছকের প্রশ্নগুলোর উত্তর দিলে তোমরা ঐ সম্পর্কগুলো চিহ্নিত করতে পারবে। এখন জোড়ায় আলোচনার মাধ্যমে ছক ৫.৬ পূরণ করো।

ছক-৫.৬	
প্রশ্ন	উত্তর
কী বৈশিষ্ট্যের কারণে চতুর্ভুজ ট্রাপিজিয়াম হবে?	
কী বৈশিষ্ট্যের কারণে ট্রাপিজিয়াম সামান্তরিক হবে?	
কী বৈশিষ্ট্যের কারণে সামান্তরিক আয়ত হবে?	
কী বৈশিষ্ট্যের কারণে সামান্তরিক রম্বস হবে?	
বর্গ কি একটি রম্বস? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।	
কী বৈশিষ্ট্যের কারণে আয়ত বর্গ হবে?	
বর্গ কি একটি সামান্তরিক? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।	
সামান্তরিক কি একটি ট্রাপিজিয়াম? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।	

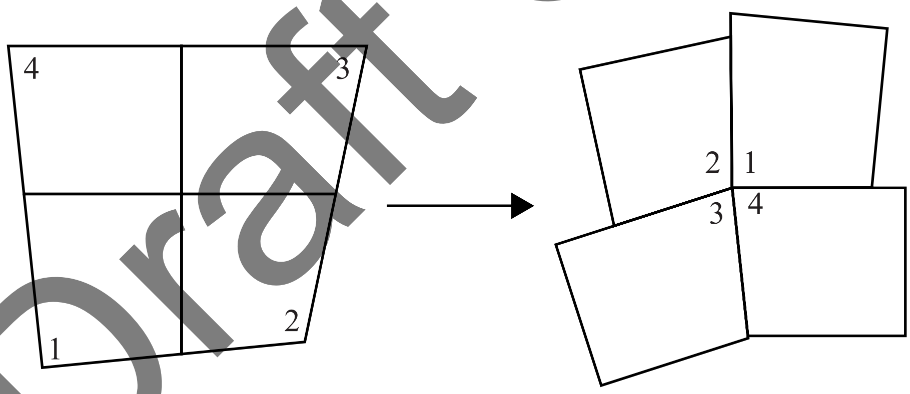
নিচে প্রদত্ত আকৃতির নামগুলো ব্যবহার করে শূন্যস্থান পূরণ করো।

আয়ত, ট্রাপিজিয়াম, বর্গ, সামান্তরিক, রম্বস, চতুর্ভুজ

চারটি বাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ আকৃতিকে ____________ বলে। যে চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল তাকে ________________ বলে। ট্রাপিজিয়ামের দুই জোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল হলে সেটি হবে ____________। আবার সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হলে আমরা ___________ পাব। আয়তের সন্নিহিত বাহু সমান হলে আমরা ________ পাব। অন্যদিকে ____________ সন্নিহিত বাহু সমান হলে সেটি হবে রম্বস এবং __________ এর একটি কোণ সমকোণ হলে তাকে বর্গ বলে।

চতুর্ভুজের চার কোণের সমষ্টি কত?

বিভিন্ন ধরনের চতুর্ভুজের বৈশিষ্ট্য এবং তাদের পারস্পারিক সম্পর্কগুলো খুঁজে বের করেছ। এবার তোমরা কাগজ কেটে চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি কত তা খুঁজে বের করবে। তোমরা প্রত্যেকে তোমাদের নিজেদের মতো করে একটি চতুর্ভুজ আঁক। অতঃপর চতুর্ভুজটিকে কেটে চার টুকরা করো যাতে চারটি কোণ চার অংশে থাকে। কোণগুলোকে একটি বিন্দুতে পরপর নিচের মতো করে সাজাও।



হিসেব করে বলো তো চতুর্ভুজের চারকোণের সমষ্টি কত? প্রত্যেকে আলাদাভাবে চতুর্ভুজ তৈরি করে হিসেব করেছ। সবার হিসেব কি একই রকম হয়েছে? নিজেদের মধ্যে আলোচনা করে সিদ্ধান্ত নাও। দেখো তো তোমাদের সিদ্ধান্ত নিচের মতো কি না?

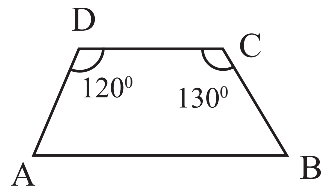
> চতুর্ভুজের চার কোণের সমষ্টি চার সমকোণ বা 360^0

একক কাজ

১. ABCD একটি সামান্তরিক। $\angle A = 60^\circ$ হলে, $\angle B = ?$

২. ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। AB এবং CD বাহুদ্বয় সমান্তরাল।

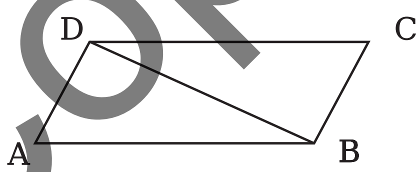
চিত্র দেখে উত্তর লেখো : $\angle A = ?$, $\angle B = ?$



সামান্তরিকের বৈশিষ্ট্য অনুসন্ধান করি

সামান্তরিকের চারটি শীর্ষকে আমরা দুই জোড়া বিপরীত শীর্ষ হিসেবে বিবেচনা করতে পারি। চলো আমরা প্রতি জোড়া বিপরীত শীর্ষে উৎপন্ন কোণদ্বয়ের মধ্যে সম্পর্ক খুঁজে দেখি।

- প্রত্যেকে নিজেদের মতো করে ABCD একটি সামান্তরিক আঁকো (চিত্র : ৫.১৩) ।
- সামান্তরিকের একটি কর্ণ BD বরাবর সামান্তরিকটিকে কেটে $\triangle ABD$ এবং $\triangle BDC$ নামে দুটি ত্রিভুজ তৈরি করো।



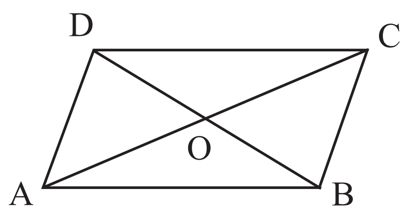
চিত্র: ৫.১৩

- অতঃপর $\triangle BDC$ কে $\triangle ABD$ এর উপর এমনভাবে স্থাপন করো যেন C বিন্দু A বিন্দুর উপর, B বিন্দু D বিন্দুর উপর এবং D বিন্দু B বিন্দুর উপর পড়ে। এক্ষেত্রে BC বাহু DA বাহুর উপর এবং DC বাহু BA বাহুর উপর পড়বে।
- লক্ষ করো, ত্রিভুজ দুটি সম্পূর্ণভাবে মিলে গিয়েছে। সুতরাং আমরা বলতে পারি যে, $\angle A = \angle C$, $AD = BC$, $AB = CD$।
- অনুরূপভাবে AC কর্ণ বরাবর কেটে দেখানো যায় যে, $\angle B = \angle D$। সুতরাং আমরা বলতে পারি যে,

সামান্তরিকের বিপরীত শীর্ষকোণগুলো পরস্পর সমান এবং সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান।

আবার, ABCD একটি সামান্তরিক অঙ্কন করো যার কর্ণদ্বয় AC ও BD (চিত্র-৫.১৪)।

- ধরো, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।
- এখন C বিন্দুকে ভাঁজ করে A বিন্দুর উপর স্থাপন করো।
- অতঃপর ভাঁজ খুলে ভাঁজ বরাবর AC কর্ণের মধ্যবিন্দু চিহ্নিত করো।



চিত্র: ৫.১৪

- আবার B বিন্দুকে ভাঁজ করে D বিন্দুর উপর স্থাপন করো এবং ভাঁজ খুলে BD কর্ণের মধ্যবিন্দু চিহ্নিত করো।
- মিলিয়ে দেখো যে বিন্দু দুইটি আলাদা কোনো বিন্দু নয় । বিন্দু দুইটি এবং AC ও BD কর্ণের ছেদবিন্দু মূলত একই বিন্দু। অর্থাৎ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সঠিকতা যাচাই- অন্যভাবে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু থেকে শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দূরত্ব মেপেও আমরা এর সত্যতা নিরূপণ করতে পারি। তোমার আঁকা সামান্তরিকের ক্ষেত্রে এভাবে সত্যতা প্রমাণ করে দেখতে পার।

একক কাজ

সামান্তরিকের ন্যায় রম্বস, আয়ত ও বর্গের কর্ণের ক্ষেত্রে কি একই বৈশিষ্ট্য কাজ করে? যাচাই করে দেখো।

আমরা জানি, রম্বসের চারটি বাহুই সমান। প্রত্যেকে ABCD একটি করে রম্বস এঁকে তার বিপরীত শীর্ষগুলো যোগ করো।

ফলে AC ও BD কর্ণদ্বয় পাওয়া যাবে। ধরো, কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে (চিত্র : ৫.১৫) । কোণ মেপে নিচের ফাঁকা স্থান পূরণ করো।

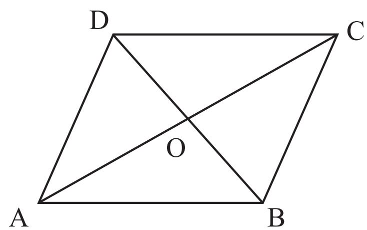
$\angle AOB=$ - - - - ডিগ্রি, $\angle BOC=$ - - - - ডিগ্রি, $\angle COD=$ - - - - ডিগ্রি, $\angle DOA=$ - - - - ডিগ্রি ।

$\angle AOB+\angle BOC=$ - - - - ডিগ্রি $=\angle AOC=$ এক সরলকোণ।

$\angle BOC+\angle COD=$ - - - - ডিগ্রি $=\angle BOD=$ এক সরলকোণ।

$\angle COD+\angle DOA=$ - - - - ডিগ্রি $=\angle COA=$ এক সরলকোণ।

$\angle DOA+\angle AOB=$ - - - - ডিগ্রি $=\angle DOB=$ এক সরলকোণ।



চিত্র-৫.১৫

রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে --------- কোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সুতরাং আমরা জানলাম, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

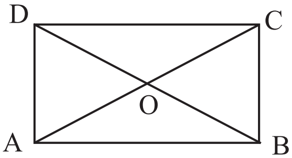
একক কাজ

বর্গের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে কি না তা প্রমাণ করে কর্মপত্রের মাধ্যমে জমা দাও।

ইতঃপূর্বে আমরা কাজের মাধ্যমে জেনেছি, আয়তের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। কিন্তু আয়তের কর্ণদ্বয় কি সমান? চলো আমরা পরের কাজটি করে জেনে নিই।

একক কাজ

চিত্র : ৫.১৬ থেকে ছক ৫.৭ এর খালি ঘর পূরণ করো এবং সিদ্ধান্ত লেখো।



চিত্র: ৫.১৬

ছক- ৫.৭	
প্রস্তাবনা ($\triangle BAD$ এবং $\triangle CAD$ ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে)	কারণ
$AB = CD$	
$AD = AD$	
অন্তর্ভুক্ত $\angle BAD =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CDA$	
$\therefore \triangle BAD$ এবং $\triangle CAD$ সর্বসম	দুইটি ত্রিভুজের দুই বাহু এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ সমান হলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয়।
$\therefore BD = AC$	

সিদ্ধান্ত: ______________________________

চতুর্ভুজের গঠন

আমরা বিভিন্ন প্রকার চতুর্ভুজের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে জানলাম যা আকৃতি পরিমাপের ক্ষেত্রে এবং পরিমাপের সিদ্ধান্ত নিতে আমাদের সাহায্য করবে। এবার আমরা কীভাবে বিভিন্ন ধরনের চতুর্ভুজ গঠন করা যায় তা নিয়ে কাজ করব। আগের শ্রেণিতে কাঠিতে স্কেলের সাহায্যে 1 cm পরপর দাগ দিয়ে চার কাঠি ব্যবহার করে সুতার সাহায্যে কাঠিগুলোকে বেঁধে বর্গ, রম্বস, আয়ত ও সামান্তরিক তৈরি করে খাতায় বসিয়ে চিত্রগুলো এঁকেছ। এই সবকটি আকৃতিই হলো চতুর্ভুজ। এর বাইরেও চার কাঠি ব্যবহার করে নানা রকমের চতুর্ভুজ বানানো সম্ভব। তবে এদেরকে হয়তো আমরা বিশেষায়িত নাম দিতে পারব না। এক কথায় সবকটিই হচ্ছে চতুর্ভুজ। কিন্তু যে কোনো দৈর্ঘ্যের চার কাঠি হলেই কি আমরা চতুর্ভুজ গঠন করতে পারব?

তোমরা ত্রিভুজ গঠনের সময় এ ধরনের সমস্যায় পড়েছিলে। যে কোনো দৈর্ঘ্যের তিনটি বাহু দিয়ে কি ত্রিভুজ গঠন সম্ভব ছিল? সেক্ষেত্রে দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বড়ো হওয়ার প্রয়োজন ছিল। চতুর্ভুজ গঠনের ক্ষেত্রে তোমরা বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের কাঠি নিয়ে চেষ্টা করো এবং তোমার সিদ্ধান্ত নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো।

এবার সহপাঠীদের সঙ্গে আলোচনা করে দেখো কোথাও ভুল হয়েছে কি না। প্রয়োজনে তোমার সিদ্ধান্তটি সংশোধন করো।

ত্রিভুজ গঠনে যেমন যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফল তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বড়ো হতে হয়, ঠিক তেমনি চতুর্ভুজ গঠনেও যেকোনো তিন বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফল চতুর্থ বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বড়ো হতে হয়। এটা না হলে চতুর্ভুজ গঠন করা সম্ভব হয় না।

দলগত কাজ

চলো এবার আমরা চতুর্ভুজ গঠন করি। এক্ষেত্রে তোমরা জ্যামিতি বক্স ব্যবহার করে কাজটি করতে পার।

(ক) ABCD চতুর্ভুজটি গঠন করো যেখানে, AB = 3 cm, BC = 4 cm, CD = 5 cm এবং DA = 6 cm.

তোমাদের বিভিন্ন দলের আঁকা চতুর্ভুজগুলো কি দেখতে একই রকম? নিশ্চয়ই নয়। কারণ পাশাপাশি দুই বাহুর মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ জানা না থাকার কারণে তোমরা তোমাদের ইচ্ছেমতো কোণ নিয়ে কাজটি করেছ। ফলে একেক দলের চতুর্ভুজের আকৃতি একেক রকম হয়েছে। তাহলে আমরা চারটি বাহুর সঙ্গে একটি কোণ নির্দিষ্ট করে দিয়ে দেখতে পারি চতুর্ভুজগুলোর আকৃতি কেমন হয়।

(খ) ABCD চতুর্ভুজটি গঠন করো যেখানে, AB = 3 cm, BC = 4 cm, CD = 5 cm, DA = 4.5 cm এবং AB ও AD বাহুর মধ্যবর্তী কোণ 60 ডিগ্রি।

এবার দেখো যে, তোমাদের প্রত্যেক দলের চতুর্ভুজটি দেখতে একই রকম হয়েছে। তাহলে আমরা বলতে পারি যে, চারটি বাহু হলেই একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ গঠন করা যায় না । একটি কোণকেও নির্দিষ্ট করতে হয়। তবে এখানে একটি ব্যাপার আছে। তুমি যদি বাহুগুলোকে নির্দিষ্ট ক্রমে যুক্ত না করে অন্য কোনোভাবে যুক্ত করো তবুও কি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ পাওয়া যাবে?

সহপাঠীদের সঙ্গে আলোচনা করে তোমার মতামত নিচের ঘরে লেখো।

চারটি বাহু এবং একটি নির্দিষ্ট কোণ দিয়ে একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ অঙ্কন করতে হলে বাহুগুলোর ক্রম নির্দিষ্ট করে দিতে হবে এবং কোণটি কোন দুই বাহুর অন্তর্ভুক্ত হবে তা নির্দিষ্ট করতে হবে এবং তখনই একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ পাওয়া যাবে।

(গ) এবার আমরা দেখি, চারটি বাহু ও একটি কর্ণ দেওয়া থাকলে একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ অঙ্কন করা যায় কি না। ধরো চতুর্ভুজের বাহুগুলো 4 cm, 4.5 cm, 5 cm, 3.5 cm এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 6.5 cm ।

অঙ্কনের নির্দেশনা

- যে কোনো একটি সরলরেখা থেকে কর্ণের সমান করে অংশ কেটে নিয়ে কর্ণের একপাশে কর্ণের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হতে যে কোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান নিয়ে দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করো ।
- এক্ষেত্রে তুমি যে কোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্য নিতে পার।
- একইভাবে কর্ণের অপর পাশে অন্য দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান করে আরও দুটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করো।
- উভয় পাশের বৃত্তচাপদ্বয়ের ছেদবিন্দু থেকে কর্ণের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় পর্যন্ত রেখা টেনে চতুর্ভুজটি অঙ্কন করো । এবার মিলিয়ে দেখো সবার চতুর্ভুজ একই রকম হয়েছে কি না।

চতুর্ভুজগুলো একই রকম না হয়ে থাকলে তার কারণ এবং কী শর্তে চতুর্ভুজগুলো একই রকম তথা নির্দিষ্ট হতে পারে তা নিচের বক্সে উল্লেখ করো।

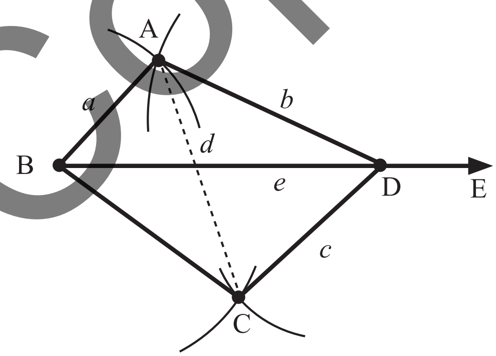
শিক্ষককে দেখাও এবং শিক্ষকের পরামর্শ নিয়ে প্রয়োজনে সংশোধন করো।

আমরা এবার লক্ষ করি একটি চতুর্ভুজে কী কী থাকে। একটি চতুর্ভুজে চারটি বাহু, চারটি কোণ এবং দুইটি কর্ণ থাকতে পারে। এই দশটি তথ্যের মধ্য থেকে আমরা পাঁচটি নির্দিষ্ট তথ্য নিয়ে একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ অঙ্কন করতে পেরেছি। আমরা এখন নানাভাবে পাঁচটি তথ্য নিয়ে দেখব নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ অঙ্কন করা যায় কি না। পরবর্তী সময়ে বিভিন্ন আকৃতির নকশা তৈরি এবং পরিমাপ করার ক্ষেত্রে চতুর্ভুজ গঠনের এই বৈশিষ্ট্যগুলো তোমরা ব্যবহার করতে পারবে।

তিনটি বাহু এবং দুইটি কর্ণ

ধরো, তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3.5$ cm এবং দুইটি কর্ণ $d = 4$ cm, $e = 5$ cm।

তথ্যগুলো দিয়ে একটি চিত্র অঙ্কন (চিত্র-৫.১৭) করা হলো।



চিত্র : ৫.১৭

৫.৮ ছকে এলোমেলোভাবে অঙ্কনের বিবরণ দেওয়া হলো। বিবরণগুলো সাজিয়ে লেখো।

ছক-৫.৮	
অঙ্কনের বিবরণ (এলোমেলোভাবে রয়েছে)	অঙ্কনের বিবরণ (সাজিয়ে লেখো)
যে কোনো রশ্মি BE থেকে BD $= e = 5$ cm নিই।	
D কে কেন্দ্র করে $c = 3.5$ cm ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর যে পাশে A বিন্দু রয়েছে তার বিপরীত পাশে একটি বৃত্তচাপ আঁকি।	
ধরি, বৃত্তচাপদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করে।	
D কে কেন্দ্র করে $b = 4$ cm ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর একই পাশে আরেকটি বৃত্তচাপ আঁকি।	

B কে কেন্দ্র করে $a = 3$ cm ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর যে কোনো পাশে একটি বৃত্তচাপ আঁকি।	
ধরি, বৃত্তচাপদ্বয় C বিন্দুতে ছেদ করে।	
A ও B, A ও D, B ও C এবং C ও D যোগ করি।	
A কে কেন্দ্র করে $d = 4$ cm ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর যে পাশে A বিন্দু রয়েছে তার বিপরীত পাশে আরেকটি বৃত্তচাপ আঁকি।	
সুতরাং ABCD চতুর্ভুজই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।	

এবার চতুর্ভুজটি অঙ্কন করে তোমার বিবরণের যথার্থতা নিশ্চিত করো এবং মিলিয়ে দেখো সকলের চতুর্ভুজ একই রকম হয়েছে কি না।

তিনটি বাহু এবং এদের অন্তর্ভুক্ত দুইটি কোণ

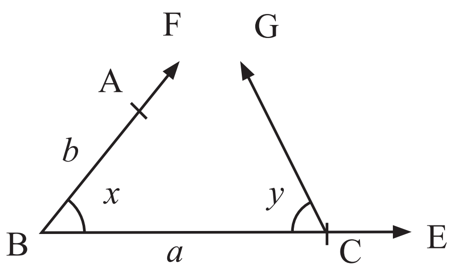
ধরো, তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $c = 4$ cm এবং a ও b এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x = 80°$, b ও c এর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle y = 70°$ । চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

৫.৯ ছকে এলোমেলোভাবে অঙ্কনের বিবরণ দেওয়া হলো। বিবরণগুলো সাজিয়ে লেখো এবং চিত্র অঙ্কন করো।

ছক-৫.৯	
অঙ্কনের বিবরণ এলোমেলোভাবে রয়েছে	অঙ্কনের বিবরণ (সাজিয়ে লেখো)
B বিন্দুতে $\angle x = 80°$ এর সমান করে $\angle CBF$ আঁকি।	
C বিন্দুতে $\angle y = 70°$ এর সমান করে $\angle BCG$ আঁকি।	
CG থেকে $c = 4$ cm = CD অংশ কেটে নিই।	
BF থেকে $b = 5$ cm = BA অংশ কেটে নিই।	
যে কোনো রশ্মি BE থেকে BC=a=6 cm নিই।	
সুতরাং ABCD চতুর্ভুজই হলো উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।	
AD যোগ করি।	

দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং তিনটি কোণ

কোনো চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য ও তিনটি কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



চিত্র : ৫.১৮

একক কাজ: ধরো, একটি চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু $a = 5$ cm, $b = 6$ cm এবং তিনটি কোণ $\angle x = 70^\circ$, $\angle y = 80^\circ$ ও $\angle z = 100^\circ$। অঙ্কনের বিবরণসহ চতুর্ভুজটি অঙ্কন করো। [ধারণা গঠনের জন্য চতুর্ভুজের একটি আংশিক খসড়া চিত্র দেওয়া হলো (চিত্র : ৫.১৮)]।

ক্ষেত্রফল নির্ণয়

তোমরা পূর্বের শ্রেণিতে ত্রিভুজ ও বিভিন্ন ধরনের চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে শিখেছ।

ত্রিভুজ ও বিভিন্ন প্রকার চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলগুলো একটি ঘরে রাখা আছে। ক্ষেত্রফলগুলো ছকে সাজিয়ে লেখো।

$$\frac{1}{2}d_1d_2, \quad bh, \quad a^2, \quad ab, \quad dh, \quad \frac{1}{2}bh, \quad \frac{h(a+b)}{2}$$

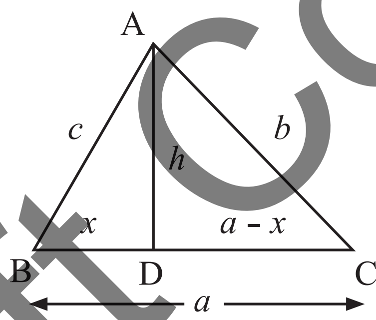
ছক-৫.১০

আকৃতি	ক্ষেত্রফল
আয়তক্ষেত্র (দৈর্ঘ্য a এবং প্রস্থ b)	
বর্গক্ষেত্র (বাহুর দৈর্ঘ্য a)	
সামান্তরিকক্ষেত্র (ভূমি b এবং উচ্চতা h)	
সামান্তরিকক্ষেত্র (একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য d এবং ঐ কর্ণের বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে উক্ত কর্ণের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য h)	

রম্বস (রম্বসের কর্ণদ্বয় d_1 ও d_2)	
ট্রাপিজিয়াম (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য a ও b এবং এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব h)	
ত্রিভুজ (ভূমি b এবং উচ্চতা h)	

তোমরা জেনেছ যে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল= $\frac{1}{2}$ × ভূমি × উচ্চতা। অর্থাৎ, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল জানতে হলে তোমাদেরকে ভূমি ও উচ্চতা সম্পর্কে জানতে হবে। যদি এমন হয় যে, উচ্চতা জানা নেই। শুধু তিন বাহুর দৈর্ঘ্য জানা আছে। সেক্ষেত্রে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বের করা যায় কি না চলো আমরা সে বিষয়ে অনুসন্ধান করি।

ধরো, ΔABC একটি ত্রিভুজ। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ এবং ভূমি BC এর উপর AD লম্ব। আমাদের AD লম্বের দৈর্ঘ্য অর্থাৎ ত্রিভুজটির উচ্চতা জানা নেই।



চিত্র : ৫.১৯

এক্ষেত্রে আমাদের ত্রিভুজের ভূমি $BC = a$ জানা আছে। আমরা যদি ত্রিভুজের উচ্চতাকে বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে বের করে ফেলতে পারি, তাহলেই আমরা আমাদের জানা সূত্রের সাহায্যে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বের করতে পারব। লম্ব AD, ΔABC কে দুইটি সমকোণী ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করেছে। ফলে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে, AD এর দৈর্ঘ্য বের করতে পারব।

ধরো, $AD = h$ এবং $BD = x$, সুতরাং, $CD = a - x$ ।

সুতরাং, ΔABD এবং ΔACD সমকোণী ত্রিভুজের বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে বক্সটি পূরণ করো।

$AB^2 =$

$AC^2 =$

$AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$

বা, ____

____

____

$\therefore x = \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$

এবং $AD^2 = c^2 - x^2$

$= c^2 - (\frac{c^2+a^2-b^2}{2a})^2$

$= (c + \frac{c^2+a^2-b^2}{2a})(c - \frac{c^2+a^2-b^2}{2a})$

$= \frac{2ac+c^2+a^2-b^2}{2a} \cdot \frac{2ac-c^2-a^2+b^2}{2a}$

$= \frac{\{(c+a)^2-b^2\}\{b^2-(c-a)^2\}}{4a^2}$

$= \frac{(c+a+b)(c+a-b)(b+c-a)(b-c+a)}{4a^2}$

[ধরি, $a + b + c = 2s$;
"s" ত্রিভুজের অর্ধ পরিসীমা
(Semi Parameter) নির্দেশ করে।]

$= \frac{2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c)}{4a^2}$

$= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$

$\therefore \boldsymbol{AD = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

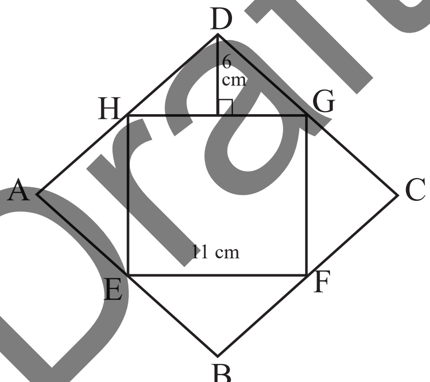
$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল$=\frac{1}{2}\times BC\times AD=\frac{1}{2}.a.\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

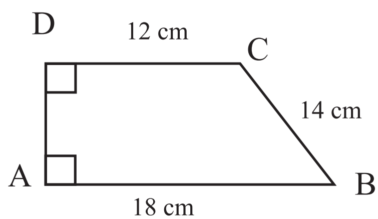
এখান থেকে বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে $s=\frac{a+b+c}{2}$ নির্ণয় করে আমরা যে কোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারব।

আবার ত্রিভুজটি যদি সমদ্বিবাহু হয় তবে ধরো, ত্রিভুজের বাহু তিনটি a, a, b । সেক্ষেত্রে, $s=\frac{a+a+b}{2}=\frac{2a+b}{2}$
$\therefore s-a=\frac{2a+b}{2}-a=\frac{2a+b-2a}{2}=\frac{b}{2},\ s-b=\frac{2a+b}{2}-b=\frac{2a+b-2b}{2}=\frac{2a-b}{2}$ ।
প্রমাণ করো যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ΔABC এর ক্ষেত্রফল$=\frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$

আবার, ত্রিভুজটি সমবাহু হলে, ধরো বাহুগুলো a, a, a । সেক্ষেত্রে, $s=\frac{a+a+a}{2}=\frac{3a}{2}$ এবং
$s-a=\frac{3a}{2}-a=\frac{3a-2a}{2}=\frac{a}{2}$ । **প্রমাণ করো যে,সমবাহু ত্রিভুজ ΔABC এর ক্ষেত্রফল$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$**

চিত্র : ৫.২০ লক্ষ করো। এখানে দুইটি ছবি দেওয়া আছে। আমরা কীভাবে এদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারি?





ABCD বর্গের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুগুলো যথাক্রমে E,F,G ও H

চিত্র: ৫.২০

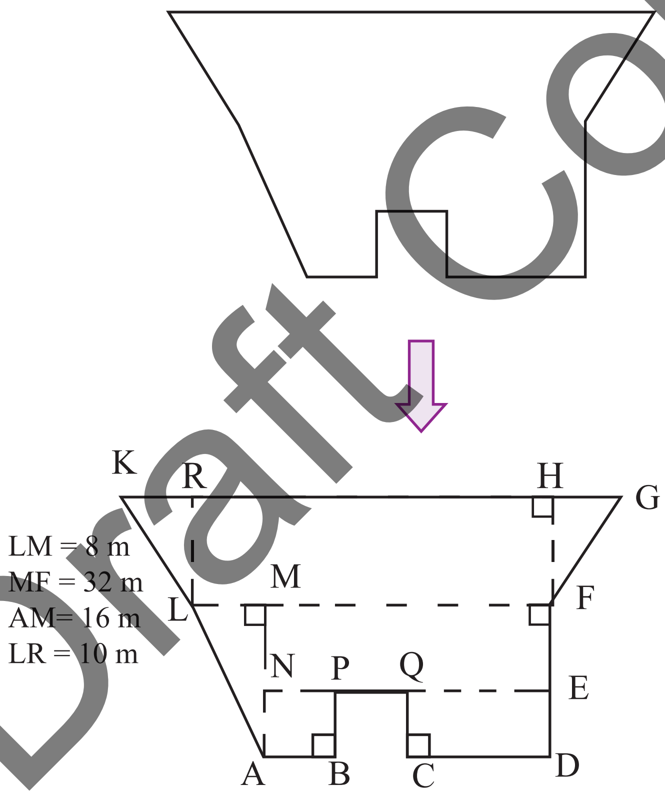
প্রথম চিত্রটির ক্ষেত্রফল বের করার ক্ষেত্রে লক্ষ করো যে, ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুগুলো যোগ করে আরেকটি চতুর্ভুজ ক্ষেত্র EFGH তৈরি করা হয়েছে। যেহেতু AE = EB = BF = FC = CG = GD = DH = HA এবং ∠A = ∠B = ∠C = ∠D, সুতরাং চারদিকে চারটি সর্বসম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ রয়েছে।

মাঝখানের বর্গক্ষেত্র ও ত্রিভুজক্ষেত্রগুলোর ক্ষেত্রফল বের করে সহজেই তোমরা সম্পূর্ণ কাঠামোটির ক্ষেত্রফল বের করে ফেলতে পারবে।

দ্বিতীয় চিত্রটি দেখো। দ্বিতীয় চিত্রটি একটি ট্রাপিজিয়াম। ট্রাপিজিয়ামটির সমান্তরাল দুই বাহুর মধ্যবর্তী দূরত্ব দেওয়া নেই। তোমরা C বিন্দু থেকে AB এর উপর লম্ব অঙ্কন করে ক্ষেত্রটিকে একটি আয়তক্ষেত্র ও একটি ত্রিভুজক্ষেত্রে আলাদা করতে পার। এক্ষেত্রে ত্রিভুজের ভূমি হবে (18 - 12) cm = 6 cm.। অতঃপর পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করে তোমরা ত্রিভুজটির উচ্চতা তথা ট্রাপিজিয়ামটির সমান্তরাল দুই বাহুর মধ্যবর্তী দূরত্ব বের করতে পারবে।

একক কাজ

চিত্র : ৫.২১ -এ একটি নমুনা নকশার মাধ্যমে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজগুলো চিহ্নিত করে দেখানো হলো। জমিটির মোট ক্ষেত্রফল বের করো।



AB = 8 m, CD = 16 m, DE = 6m, EF = 8 m, FH = 10 m, KG = 56 m

ক্ষেত্রফল = ________________ বর্গ মি.

চিত্র : ৫.২১

ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের বৈশিষ্ট্য এবং গঠন-সম্পর্কিত বিভিন্ন বিষয় তোমরা আয়ত্ত করলে। এখন তোমাদের বিদ্যালয়ের জমির যে নকশা তৈরি করেছিলে সেই নকশাটিকে বিভিন্ন ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজে বিভক্ত করে পরিমাপ করার জন্য একটি ছবি নিচের বক্সে আঁকো।

তোমার বিদ্যালয়ের জমির নকশা পরিমাপের ছবি :

- তোমার বিদ্যালয়ের জমির মোট পরিমাণ কত?
- বিদ্যালয়ের খালি জায়গার পরিমাণ কত?
- বিদ্যালয়ের খালি জায়গার পরিমাণ মোট জমির কত অংশ?

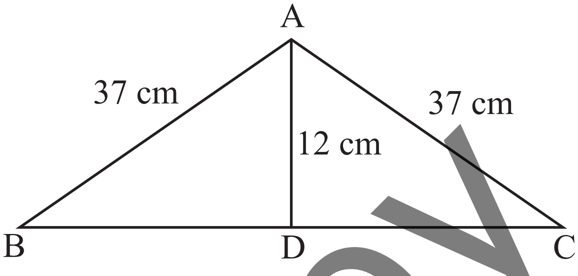
উক্ত তথ্যগুলো পরিমাপ করে পরিমাপের ফলাফল লিখে শ্রেণিকক্ষে উপস্থাপন করো।

এই অভিজ্ঞতাটির মধ্য দিয়ে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের গঠন ও বৈশিষ্ট্য সম্পর্কিত যে কাজগুলো তোমরা সম্পন্ন করেছ তা বিভিন্ন বস্তু পরিমাপের ক্ষেত্রে তোমরা ব্যবহার করবে। একই সঙ্গে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে এই শিখনগুলো প্রয়োগ করবে।

অনুশীলনী

১। চিত্র ক-এ প্রদত্ত আকৃতি পরিমাপের ক্ষেত্রে কীভাবে সমকোণী ত্রিভুজের বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করবে? সমস্যাটি সমাধান করো এবং পিথাগোরাসের উপপাদ্য কীভাবে সাহায্য করল যুক্তি দাও।

AD = 12 cm হলে BC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

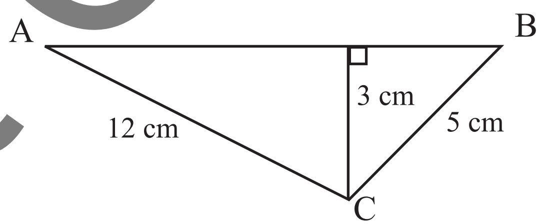


চিত্র-ক

২। চিত্র এঁকে বা কাগজ কেটে প্রমাণ করো– বর্গের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান।

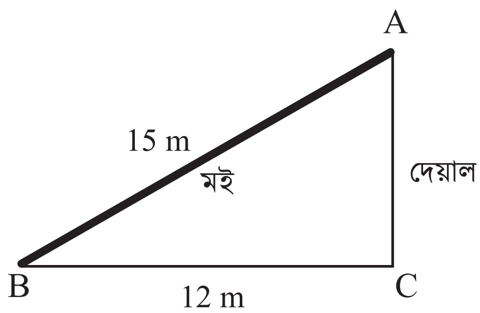
৩। ধরো চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে 4 cm, 3 cm, 3.5 cm, 5 cm এবং যে কোনো একটি কোণ দেওয়া আছে 60 ডিগ্রি। চতুর্ভুজটি অঙ্কন করো।

৪। চিত্র : খ-এ AB = ?



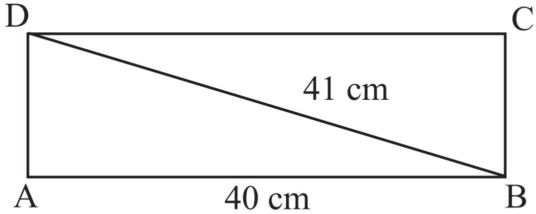
চিত্র-খ

৫। তোমার স্কুলের একটি দেয়াল রঙ করার জন্য যদি 15 m একটি মইকে দেয়াল থেকে 12 m দূরত্বে স্থাপন করা হয় (চিত্র : গ)। তাহলে ভূমি থেকে মইয়ের শীর্ষবিন্দু পর্যন্ত দেয়ালের উচ্চতা নির্ণয় করো।



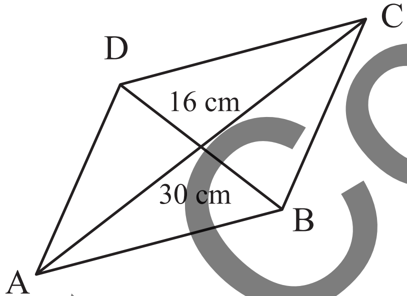
চিত্র-গ

৬। চিত্র : ঘ এর আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা নির্ণয় করো।



চিত্র : ঘ

৭। চিত্র : ঙ এর রম্বসের কর্ণ AC = 30 cm. ও BD = 16 cm. হলে রম্বসের পরিধি নির্ণয় করো।



চিত্র : ঙ

৮। "যদি (3, 4 ও 5) পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী হয়, তবে (3k, 4k ও 5k) পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী হবে, যেখানে k যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।" উক্তিটির যথার্থতা যাচাই করো।

৯। "যেকোনো ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।" যে কোনো আকৃতির ত্রিভুজ তৈরি করে বা কাগজ কেটে পরিমাপের মাধ্যমে উক্তিটির সত্যতা নিশ্চিত করো।

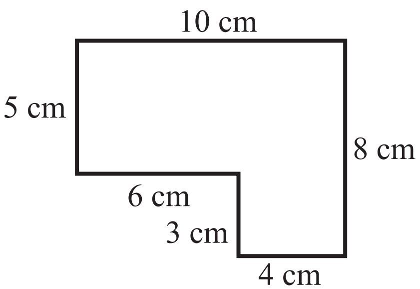
১০। সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য 6 cm ও 5 cm এবং বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 50^{o} হলে সামান্তরিকটি অঙ্কন করো।

১১। একটি বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 5 cm হলে বর্গটি অঙ্কন করো।

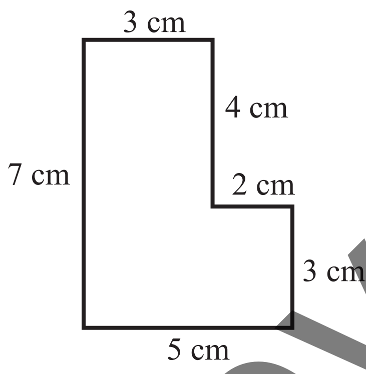
১২. একটি সামান্তরিক আকৃতির জমির দুটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য 4 m ও 5 m এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 7 m। সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

১৩। ABCD আয়তাকার জমির AB = 10 m এবং কর্ণ AC = 16 m । কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু G হলে ΔAGB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

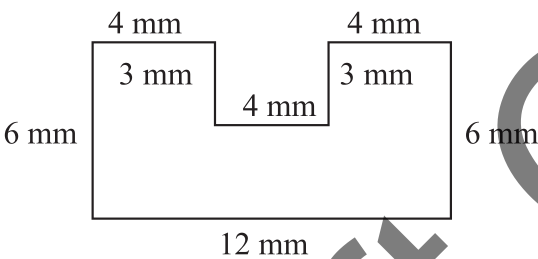
১৪। প্রদত্ত আকৃতিগুলোর ক্ষেত্রফল পরিমাপ করো :



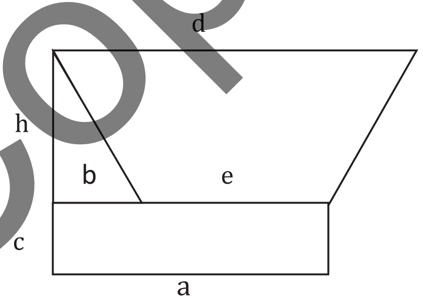
(ক)



(খ)



(গ)

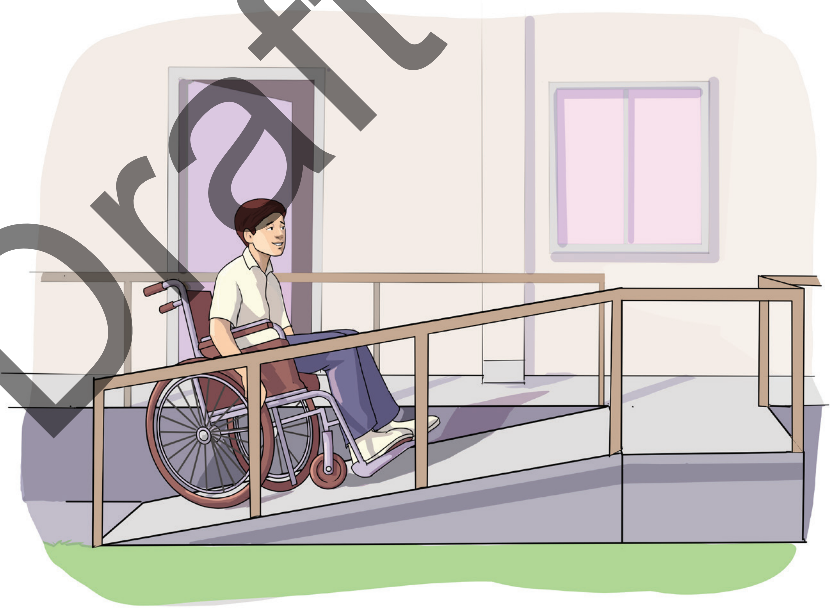


(ঘ)

অবস্থান মানচিত্রে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে

- কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক
- স্থানাঙ্কের মাধ্যমে দুটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয়
- রেখাংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক
- সরলরেখার সমীকরণ
- সরলরেখার ঢাল



অবস্থান মানচিত্রে স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

আমাদের দৈনন্দিন বিভিন্ন কাজে মানচিত্র ব্যবহার করার প্রয়োজন হয়; যেমন– ভৌগোলিক অবস্থান জানতে, ঐতিহাসিক স্থান চিহ্নিত করতে, জমির পরিমাপ করতে ইত্যাদি। মানচিত্র তৈরি করতে জ্যামিতির ভূমিকা অপরিসীম। স্থানাঙ্ক জ্যামিতির মাধ্যমে আমরা অতি সহজেই বিভিন্ন স্থানের অবস্থান নির্ণয় করতে পারি। এই অভিজ্ঞতায় আমরা স্থানাঙ্ক জ্যামিতির মাধ্যমে আমাদের শিক্ষাপ্রতিষ্ঠানের বিভিন্ন স্থাপনার অবস্থান নির্ণয় করব এবং এর মাধ্যমে শিক্ষাপ্রতিষ্ঠানের একটি মানচিত্র প্রস্তুত করব।

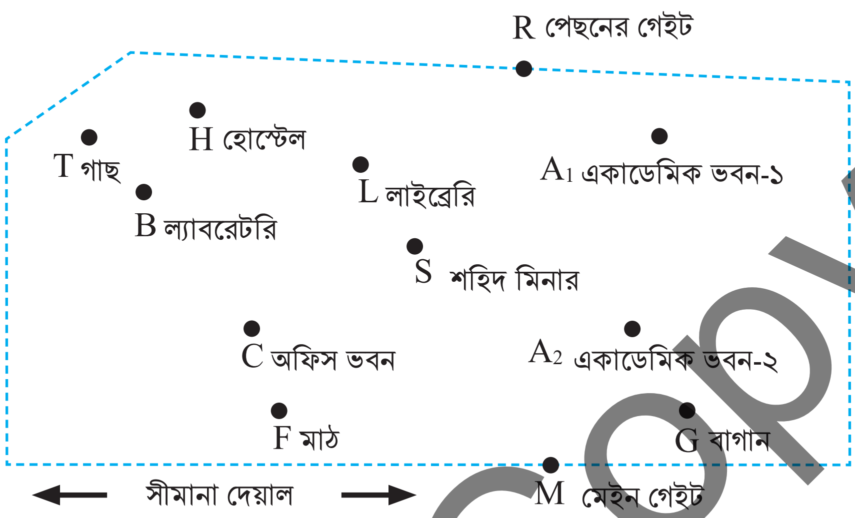
মানচিত্রে একটি শিক্ষা প্রতিষ্ঠান

এখানে একটি শিক্ষাপ্রতিষ্ঠানের মানচিত্রের নমুনা উপস্থাপন করা হয়েছে। এই মানচিত্রে অফিস ভবন, ফুলের বাগান ইত্যাদি দেখা যাচ্ছে। তোমরা আরও কী কী দেখতে পাচ্ছ, তার একটা তালিকা নিচের ঘরে লেখো।

চিত্র : ৬.১

তোমাদের তালিকাটি শ্রেণিশিক্ষককে এবং সতীর্থদেরকে দেখাও এবং তাদের পরামর্শমতো প্রয়োজনীয় সংশোধন করে নাও।

মানচিত্রে উপস্থাপিত বিভিন্ন স্থাপনা, ফুলের বাগান, মাঠ, গাছপালার অবস্থানকে বিন্দুর মাধ্যমে প্রকাশ করে চিত্র : ৬.২-এ উপস্থাপন করা হয়েছে। এ ধরনের মানচিত্রকে **অবস্থান মানচিত্র** বলে।



চিত্র : ৬.২

চোখের আন্দাজ বা অনুমান করে অবস্থান মানচিত্র প্রস্তুত করা যায় না। অবস্থান মানচিত্র প্রস্তুত করতে গুরুত্বপূর্ণ হলো গাণিতিক হিসাব করে বিভিন্ন বস্তুর সঠিক অবস্থান, আকার ও একটির সাপেক্ষে অন্যটির দূরত্ব পরিমাপ করা এবং পরিমাপমতো মানচিত্রে বস্তুগুলো অঙ্কন করা। এই কাজগুলো করতে আমাদের স্থানাঙ্ক জ্যামিতির ধারণা প্রয়োজন। এসো আমরা স্থানাঙ্ক জ্যামিতির প্রয়োজনীয় বিষয়গুলো জেনে নিই।

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতি (Cartesian coordinate system)

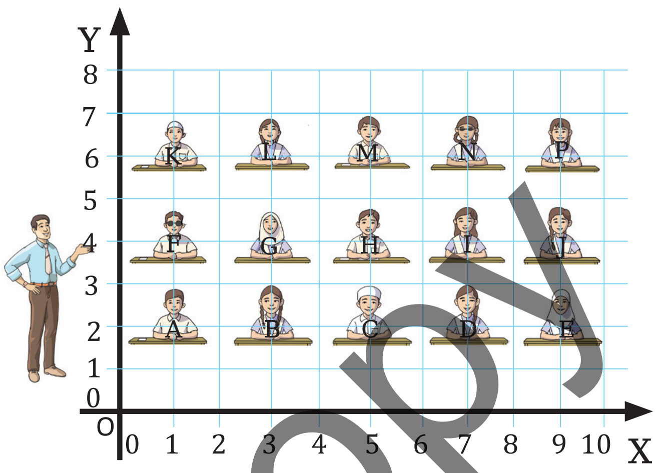
কোনো প্রতিষ্ঠানের মানচিত্র তৈরি করতে হলে প্রতিষ্ঠানের ভেতরের বিভিন্ন বস্তুর অবস্থান গাণিতিকভাবে নির্ণয় করতে হয়। যেমন– প্রতিষ্ঠানটি যে জমি বা ভূমির উপর স্থাপিত, তার পরিমাণ বা ক্ষেত্রফল কত? এর পরিসীমা বা সীমানা উত্তর, পশ্চিম, দক্ষিণ ও পূর্ব দিকে কতটা দীর্ঘ? প্রতিষ্ঠানের ভেতরে কটি ভবন আছে এবং কোন ভবনের পাশে কী আছে? একটি ভবন থেকে আরেকটি ভবন কত দূরে? চলাচলের পথ কতটা সোজা অথবা, কতটা বাঁকা? গাছ, বাগান ও খেলার মাঠ ইত্যাদি কোথায় অবস্থিত? এই রকম নানা প্রশ্নের উত্তর গাণিতিকভাবে পরিমাপ করতে হয় এবং সঠিক আনুপাতিক হারে তা কাগজে অঙ্কন করে অবস্থান মানচিত্র তৈরি করতে হয়। আর এই কাজগুলো করতে গণিতের স্থানাঙ্ক পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। স্থানাঙ্ক পদ্ধতি সম্পর্কে বিস্তারিত ধারণা পেতে আমরা বিভিন্ন ছবি দেখে কিছু কাজ করব।

স্থানাঙ্কের মাধ্যমে অবস্থান চিহ্নিতকরণ

ছবিতে (চিত্র ৬.৩) কী দেখতে পাচ্ছ? একজন শিক্ষক দাঁড়িয়ে আছেন এবং শিক্ষার্থীরা বসে আছে। শিক্ষকের অবস্থান থেকে আনুভূমিকভাবে একটি সংখ্যারেখা এবং উল্লম্বভাবে সমকোণে আরেকটি সংখ্যারেখা গিয়েছে। এই সংখ্যারেখা দুটির নির্দিষ্ট নাম আছে; আনুভূমিক সংখ্যারেখার নাম হলো x-অক্ষ (x-axis), আর x-অক্ষের সঙ্গে উল্লম্ব সংখ্যারেখাটির নাম হলো y-অক্ষ (y-axis)।

শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

x-অক্ষ ও y-অক্ষ পরস্পর যে বিন্দুতে ছেদ করেছে, তাকে মূলবিন্দু (origin) বলে। চিত্র : ৬.৩-এ শিক্ষক যেখানে দাঁড়িয়ে আছেন, সেখানে অক্ষ দুইটি ছেদ করেছে এবং এই ছেদবিন্দুটি হলো মূলবিন্দু। মূলবিন্দুর সাপেক্ষে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ ব্যবহার করে একজন শিক্ষক গাণিতিকভাবে শিক্ষার্থীদের সঠিক অবস্থান বলে দিতে পারবেন। যেমন- শিক্ষার্থী M এর অবস্থান হলো মূলবিন্দু হতে x-অক্ষ বরাবর 5 একক দূরত্বে এবং y-অক্ষ বরাবর 6 একক দূরত্বে। শিক্ষার্থী M এর অবস্থান সংক্ষেপে লেখা যায় M(5, 6)। একইভাবে শিক্ষার্থী G এর অবস্থান হলো মূলবিন্দু হতে x-অক্ষ বরাবর 3 একক দূরত্বে এবং y-অক্ষ বরাবর 4 একক দূরত্বে। একে সংক্ষেপে লেখা যায় G(3, 4)। এদের প্রথমটিকে ভুজ (abscissa) এবং দ্বিতীয়টিকে কোটি (ordinate) বলে। এভাবে মূল বিন্দু, x-অক্ষ ও y-অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থানকে স্থানাঙ্ক জ্যামিতির মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। এখন তোমরা কি P এর স্থানাঙ্ক লেখতে পারবে? প্রদত্ত বক্সে P এর স্থানাঙ্ক লেখো।



চিত্র: ৬.৩

একক কাজ

চিত্র : ৬.৩ দেখে নিচের ছকে নামের পাশে ভুজ ও কোটি উল্লেখ করে স্থানাঙ্ক লেখো।

ছক ৬.১

নাম	ভুজ	কোটি	স্থানাঙ্ক
B	3	1	B(3, 1)
G			
L			

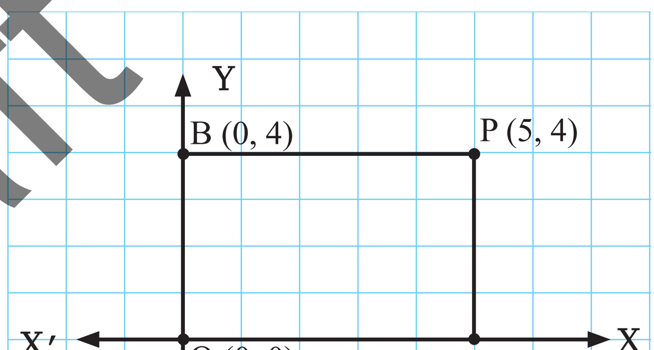
নাম	ভুজ	কোটি	স্থানাঙ্ক
E			
K	1	6	
A			

লক্ষ করো যে, চিত্র : ৬.৩-এ শিক্ষকের অবস্থানের সাপেক্ষে শিক্ষার্থীদের অবস্থান নির্ণয় করা হয়েছে। আসলে কোনো বস্তুর অবস্থান জানতে হলে আরেকটি বস্তুর অবস্থানের সাপেক্ষে তা জানতে হয়। যেমন– কোন শিক্ষার্থীর অবস্থান কোথায় তা এখানে শিক্ষকের অবস্থানের সাপেক্ষে নির্ণয় করা হয়েছে। এখানে শিক্ষক হচ্ছেন মূল অবস্থানে যার সাপেক্ষে অন্যান্য শিক্ষার্থীদের অবস্থান নির্ণয় করা হয়েছে। তাই শিক্ষকের অবস্থান হলো এখানে মূলবিন্দু। যদি তুমি তোমার সাপেক্ষে অন্যদের অবস্থান নির্ণয় করতে চাও, তাহলে তোমার অবস্থান হবে মূলবিন্দু।

মূলবিন্দুতে **(origin)** x-অক্ষ ও y-অক্ষ পরস্পরকে ছেদ করে। মূলবিন্দুতে ভুজ 0 ও কোটি 0। অর্থাৎ মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক হলো (0, 0)। এভাবে একটি মূলবিন্দু ধরে তার সাপেক্ষে অন্য বিন্দুর ভুজ ও কোটির মাধ্যমে অবস্থান প্রকাশ করার গাণিতিক পদ্ধতিকে বলা হয় স্থানাঙ্ক জ্যামিতি (coordinate geometry)। ফরাসি দার্শনিক, গণিতবিদ এবং বিজ্ঞানী রেনে দেকার্তে (Rene Descartes) এই স্থানাঙ্ক পদ্ধতির সূচনা করেন। তাঁরই নামানুসারে জ্যামিতির এই শাখাটি কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নামে পরিচিত। কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতি গণিতের একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। এই পদ্ধতির মাধ্যমে আমরা বিভিন্ন বস্তুর অবস্থান সঠিকভাবে নির্ণয় করতে পারি।

Rene' Descartes

ধরো, তুমি মূলবিন্দু থেকে কোনো একটি বিন্দু যেমন, P(5, 4) বিন্দুতে পৌঁছাতে চাও। তাহলে তুমি x-অক্ষ বরাবর 5 একক দূরত্বে (5, 0) বিন্দুতে পৌঁছানোর পর y-অক্ষের সমান্তরালে 4 একক দূরত্ব অতিক্রম করে P(5, 4) বিন্দুতে পৌঁছাতে পার। আবার অন্যভাবে, প্রথমে মূলবিন্দু থেকে y-অক্ষ বরাবর 4 একক দূরত্বে (0, 4) বিন্দুতে পৌঁছানোর পর x-অক্ষের সমান্তরালে 5 একক দূরত্ব অতিক্রম করে P(5, 4) বিন্দুতে পৌঁছাতে পার। পথ দুইটি একটি আয়তাকার আকৃতি তৈরি করে। অর্থাৎ অক্ষদ্বয় এবং P বিন্দু থেকে অক্ষদ্বয়ের উপর লম্ব রেখাদ্বয় একটি আয়ত উৎপন্ন করে। এজন্য কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্কও বলা হয়।



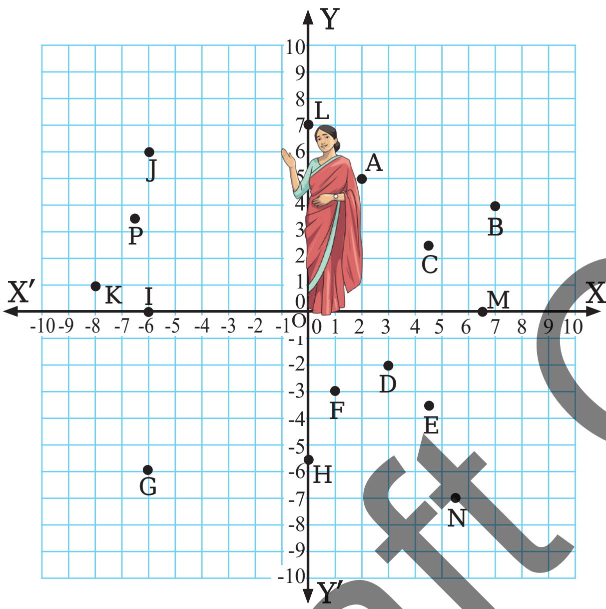
চিত্র: ৬.৫

চিত্র : ৬.৩-এ শ্রেণিকক্ষে শিক্ষক এক কর্নারে দাঁড়িয়ে ছিলেন। যদি শিক্ষক শ্রেণিকক্ষের মাঝখানে দাঁড়িয়ে থেকে বিভিন্ন শিক্ষার্থীর অবস্থান নির্ণয় করতে চান, তখন কী করবেন? এই অবস্থায় ছোটো একটি কাজ করে খুব সহজে শিক্ষার্থীদের অবস্থান নির্ণয় করা যায়। যা করতে হবে তা হলো, x-অক্ষের সংখ্যারেখাকে বামদিকে

বর্ধিত করতে হবে। সংখ্যারেখায় 0 এর বামদিকের সংখ্যাগুলো ঋণাত্মক এবং সংখাগুলো ক্রমান্বয়ে ছোটো হতে থাকে। একইভাবে y-অক্ষের সংখ্যারেখাকে নিচের দিকে বর্ধিত করতে হবে। এই বর্ধিত সংখ্যারেখায় 0 এর নিচের দিকের সংখ্যাগুলো ঋণাত্মক এবং সংখ্যাগুলো নিচের দিকে ক্রমান্বয়ে ছোটো হতে থাকে।

একক কাজ

চিত্র ৬.৬ এ দেখানো শিক্ষকের অবস্থান O (0, 0) সাপেক্ষে বিন্দুগুলোর অবস্থান কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে প্রকাশ করো।



চিত্র: ৬.৬

ছক: ৬.২

বিন্দু	ভুজ	কোটি	স্থানাঙ্ক
K	−8	1	K(−8,1)
C			
H			
N			
P	−6.5	3.5	P(−6.5,3.5)
M			
A			
B			
D			
E			
F			
G			
I			
J			
L			

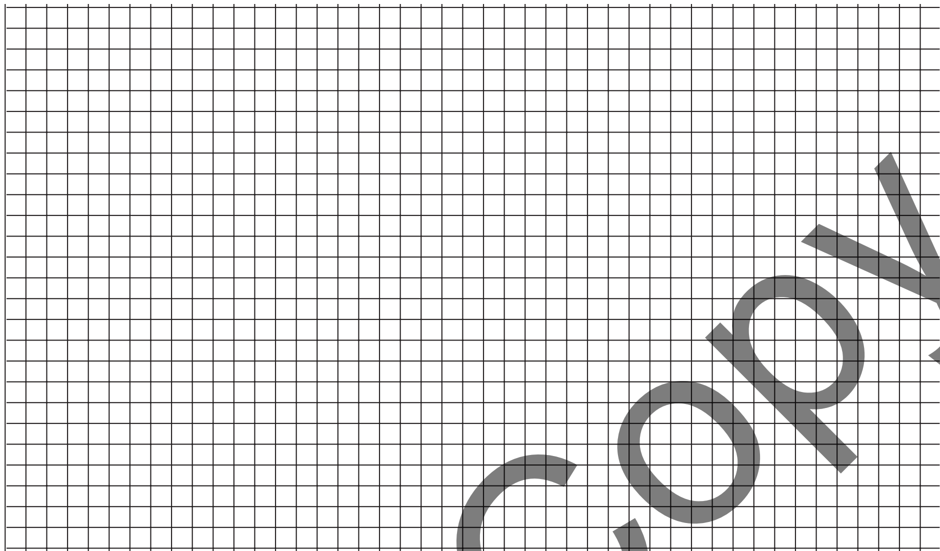
x-অক্ষের উপর অবস্থিত যে কোনো বিন্দুর কোটি শূন্য এবং y-অক্ষের উপর অবস্থিত যে কোনো বিন্দুর ভুজ শূন্য।

দলগত কাজ

নিচে কিছু বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে। তোমাদের সুবিধামতো মূলবিন্দু নিয়ে x-অক্ষ ও y-অক্ষ অঙ্কন করে নাও। তারপর নিচের বিন্দুগুলো প্রদত্ত গ্রাফপেপারে চিহ্নিত করো :

A(−3.5, 5.5), B(−4, −4), C(0, − 5, 5),

D(−5,0), E(3.5, − 5.5) ,F(3.5, − 5.5), G(0, 1.5)

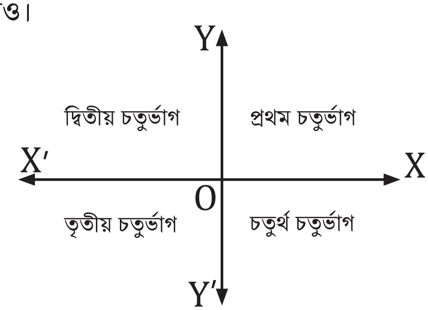


চিত্র: ৬.৭

চতুর্ভাগ (Quadrant)

তোমরা দেখেছ, বস্তুর অবস্থানের ক্ষেত্রে কখনো কোটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক এবং ভুজ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হয়। এ কারণে আমরা xy- সমতলকে চারটি ভাগে ভাগ করতে পারি। এই ভাগগুলোকে আমরা প্রথম চতুর্ভাগ, দ্বিতীয় চতুর্ভাগ, তৃতীয় চতুর্ভাগ এবং চতুর্থ চতুর্ভাগ বলি। চিত্র : ৬.৮-এ ভাগগুলোকে দেখানো হয়েছে। তোমরা কি বলতে পারবে প্রতি চতুর্ভাগের বিন্দুর স্থানাঙ্ককে যথাযথ চিহ্নের মাধ্যমে আমরা কীভাবে লেখতে পারি? নিচের ছকটি পূরণ করো এবং প্রত্যেক চতুর্ভাগে চিহ্নগুলো দেখাও।

ছক: ৬.৩		
চতুর্ভাগ	ভুজের চিহ্ন	কোটির চিহ্ন
প্রথম		
দ্বিতীয়		
তৃতীয়		
চতুর্থ		



চিত্র: ৬.৮

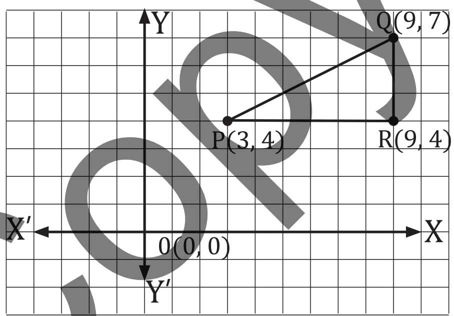
কোনো একটি বিন্দু যে কোনো চতুর্ভাগেই অবস্থিত হোক না কেন বিন্দুটির ভুজ হবে উক্ত বিন্দু থেকে y-অক্ষের উপর লম্ব দূরত্বের সংখ্যাগত মান এবং চতুর্ভাগ বিবেচনায় যথাযথ চিহ্ন (+ বা –)। একইভাবে কোনো একটি বিন্দু যে কোনো চতুর্ভাগেই অবস্থিত হোক না কেন বিন্দুটির কোটি হবে উক্ত বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর লম্ব দূরত্বের সংখ্যাগত মান এবং চতুর্ভাগ বিবেচনায় যথাযথ চিহ্ন (+ বা –)।

দুটি বিন্দুর দূরত্ব

মানচিত্র তৈরি করার সময় বিভিন্ন বস্তুর মধ্যবর্তী দূরত্ব পরিমাপ করে গ্রাফ কাগজে সঠিকভাবে আনুপাতিক হারে বস্তুগুলোর অবস্থান চিহ্নিত করতে হয়। এখন আমরা বিভিন্ন বস্তুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করব এবং মানচিত্রে বস্তুগুলোকে দূরত্বের আনুপাতিক হারে চিহ্নিত করব। পিথাগোরাসের উপপাদ্য, যা তোমরা আগেই জেনেছ, ব্যবহার করে দুটি বস্তু বা বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করা যায়।

পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করে দূরত্ব নির্ণয়

ধরো, xy-সমতলে (চিত্র :৬.৯) P(3, 4) এবং Q(9,7) দুটি বিন্দু। P বিন্দু থেকে x-অক্ষের সমান্তরাল করে PR রেখাংশ এবং Q বিন্দু থেকে y-অক্ষের সমান্তরাল করে QR রেখাংশ আঁকি যারা R বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং ΔPQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ।



চিত্র: ৬.৯

P ও Q বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ΔPRQ সমকোণী ত্রিভুজটি বিবেচনা করো। এবার বলো তো R বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত? লক্ষ করো, PR রেখাংশটি x-অক্ষের সমান্তরাল হওয়ায় রেখাংশটির প্রত্যেক বিন্দুর কোটি সমান। একইভাবে QR রেখাংশটি y-অক্ষের সমান্তরাল হওয়ায় তাদের ভুজ সমান। সুতরাং R বিন্দুর স্থানাঙ্ক R(9, 4)। এখানে P ও R বিন্দুদ্বয়ের কোটি একই থাকায় P ও R বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব হবে বিন্দু দুটির ভুজদ্বয়ের অন্তরের সংখ্যাগত মান। অর্থাৎ PR = 9 – 3 = 6. একইভাবে, RQ = 7 – 4 = 3.

এবার, পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী, $PQ^2 = PR^2 + RQ^2$

সুতরাং, $PQ = \sqrt{PR^2 + RQ^2}$ [দূরত্বের ক্ষেত্রে ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয়]

$$= \sqrt{(9-3)^2 + (7-4)^2}$$

$$= \sqrt{36+9}$$

$$= \sqrt{45}$$

$$= 3\sqrt{5}$$

সুতরাং, এখানে P ও Q এর মধ্যে দূরত্ব হলো $3\sqrt{5}$ একক।

একক কাজ

নিচের ছকে কিছু বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো।

ছক ৬.৪

প্রথম বিন্দু	দ্বিতীয় বিন্দু	ভুজদ্বয়ের পার্থক্য	কোটিদ্বয়ের পার্থক্য	দূরত্ব
$B(-8,4)$	মূলবিন্দু $O(0,0)$	$0-(-8)$ $=8$	$0-4=-4$	$\sqrt{(8)^2+(-4)^2}=\sqrt{64+16}=4\sqrt{5}$
$A(4,6)$	$B(-8,4)$			
$B(-8,4)$	$C(2,3)$			
$D(2,-3)$	$E(-3,2)$			
$F(-5,-6)$	$A(4,6)$			

সুতরাং, যদি দুটি বিন্দু P ও Q এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) হয়, তবে বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের পার্থক্য})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের পার্থক্য})^2}$$

মধ্যবিন্দু (Mid Point) নির্ণয়

মানচিত্র প্রস্তুত করার সময় দুই বিন্দুর মধ্যবিন্দু নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়ে থাকে। যেমন, একটি ভবন বা মাঠ অনেক বিস্তৃত হয়। ভবন বা মাঠের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করে তা গ্রাফ কাগজে চিহ্নিত করার প্রয়োজন হয়ে থাকে। চলো আমরা স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে কীভাবে মধ্যবিন্দু নির্ণয় করা যায় তা দেখি।

বিন্দুদ্বয় অক্ষের উপরে অবস্থিত হলে

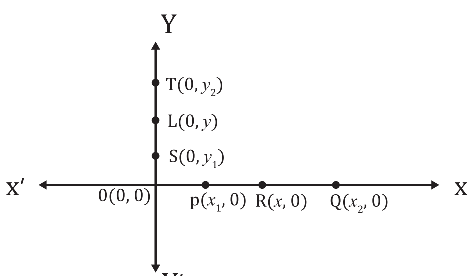
ধরো, x-অক্ষের উপর দুইটি বিন্দু $P(x_1, 0)$ এবং $Q(x_2, 0)$

$\therefore OP = x_1$ এবং $OQ = x_2$

ধরো, P ও Q বিন্দুর মধ্যবিন্দু R এবং R এর স্থানাঙ্ক $(x, 0)$

$\therefore OR = x, PR = OR - OP = x - x_1$ এবং $QR = OQ - OR = x_2 - x$

যেহেতু P ও Q এর মধ্যবিন্দু R, সুতরাং $PR = QR$.



চিত্র : ৬.১০

সুতরাং

$$x - x_1 = x_2 - x$$

$$\text{বা, } 2x = x_1 + x_2$$

$$\text{বা, } x = \frac{x_1+x_2}{2}$$

যেহেতু R, x-অক্ষের উপর অবস্থিত, সুতরাং R বিন্দুর কোটি শূন্য। ফলে R এর স্থানাঙ্ক $R(\frac{x_1+x_2}{2}, 0)$।

এবার ধরো, y-অক্ষের উপর দুইটি বিন্দু $S(0, y_1)$ এবং $T(0, y_2)$

$\therefore OS = y_1$ এবং $OT = y_2$

ধরো, S ও T বিন্দুর মধ্যবিন্দু L এবং L এর স্থানাঙ্ক $(0, y)$

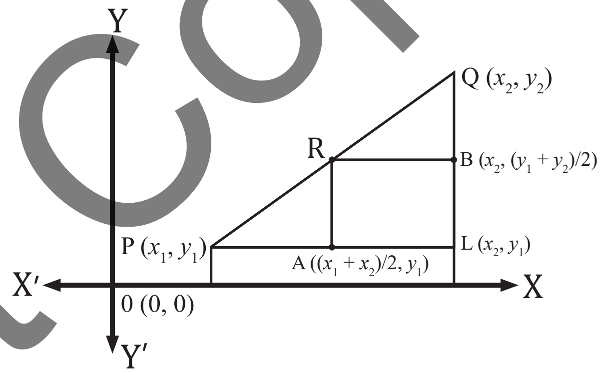
এবার তুমি L বিন্দুর স্থানাঙ্ক বের করো তো। দেখ, L বিন্দুর স্থানাঙ্ক হবে, $L(0, \frac{y_1+y_2}{2})$।

যে কোনো দুটি বিন্দুর ক্ষেত্রে

আমরা দেখলাম, কীভাবে x-অক্ষের উপর এবং y-অক্ষের উপর দুটি বিন্দুর সংযোগ রেখার মধ্যবিন্দু নির্ণয় করা যায়। এখন আমরা যে কোনো দুই বিন্দুর মধ্যবিন্দু কীভাবে নির্ণয় করা যায় তা নিয়ে চিন্তা করি।

ধরো, P (x_1, y_1) এবং Q (x_2, y_2) যে কোনো দুটি বিন্দু। P বিন্দু থেকে x-অক্ষের সমান্তরাল করে PL রেখাংশ এবং Q বিন্দু থেকে y-অক্ষের সমান্তরাল করে QL রেখাংশ আঁকি যারা L বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং ΔPQL একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

PL এর মধ্যবিন্দু A দিয়ে LQ এর সমান্তরাল AR (LQ ∥ AR) এবং LQ এর মধ্যবিন্দু B দিয়ে PL ∥ BR আঁকি। এবার R বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত তা নিচে লেখো।



চিত্র: ৬.১১

এখন, ΔPAR এবং ΔBRQ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে AP = AL = BR, AR = LB = BQ। সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴PR = RQ , অর্থাৎ R, PQ এর মধ্যবিন্দু। চিত্রানুযায়ী, R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $R(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$।

যদি দুইটি বিন্দু $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ হয়, তবে বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখার মধ্যবিন্দু R হলে, R এর স্থানাঙ্ক হবে $R(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ ।

সুতরাং, দুই বিন্দুর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $= \left(\frac{\text{ভুজদ্বয়ের যোগফল}}{2}, \frac{\text{কোটিদ্বয়ের যোগফল}}{2}\right)$

উদাহরণ: $A(4,6)$ ও $B(-8,4)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

সমাধান : A ও B এর মধ্যবিন্দু $=\left(\frac{4+(-8)}{2}, \frac{6+4}{2}\right) = \left(\frac{4-8}{2}, \frac{10}{2}\right) = (-2, 5)$

একক কাজ

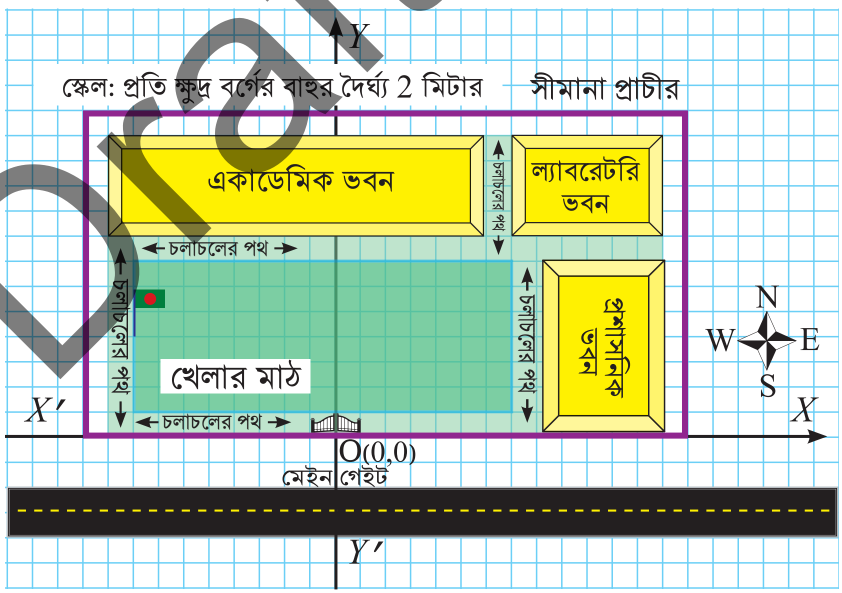
নিচের ছকে প্রদত্ত বিন্দুগুলোর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

ছক ৬.৫

ক্রমিক	প্রথম বিন্দু	দ্বিতীয় বিন্দু	মধ্যবিন্দু
১	$B(-8,4)$	$O(0,0)$	$\left(\frac{-8+0}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = (-4, 2)$
২	$A(4,6)$	$B(-8,4)$	
৩	$C(-5,-5)$	$D(6.5,-6.5)$	
৪	$B(-8,4)$	$D(6.5,-6.5)$	
৫	$A(4,6)$	$C(-5,-5)$	
৬	$B(-8,4)$	$C(-5,-5)$	

দলগত কাজ

চিত্র : ৬.১২-এ একটি বিদ্যালয়ের ম্যাপ দেওয়া আছে। এটি ভালো করে পর্যবেক্ষণ করো।



চিত্র: ৬.১২

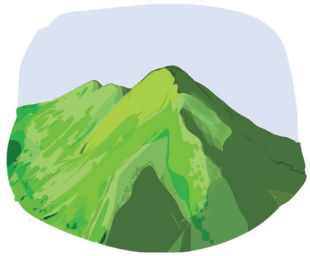
চিত্র : ৬.১২ অনুযায়ী বিদ্যালয়ের মেইন গেইট এর মাঝ বরাবর ভূমিতে মূলবিন্দু $(0, 0)$ ধরে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর লেখো। শিক্ষকের নির্দেশনা ভালোমতো লক্ষ করো।

ছক ৬.৬		
ক্রমিক	প্রশ্ন	উত্তর
১	পতাকা স্ট্যান্ডের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?	
২	খেলার মাঠের চার কোনার স্থানাঙ্কগুলো লেখো।	
৩	খেলার মাঠের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।	
৪	ল্যাবরেটরি ভবনের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো এবং মেইন গেইট থেকে ল্যাবরেটরি ভবনের মধ্যবিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করো।	
৫	প্রশাসনিক ভবনের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো এবং ল্যাবরেটরি ও প্রশাসনিক ভবনের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করো।	
৬	খেলার মাঠের কর্ণ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।	
৭	খেলার মাঠের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?	
৮	বিদ্যালয়ের সীমানা প্রাচীরের পরিসীমা নির্ণয় করো।	
৯	তোমার বন্ধু/সহপাঠীর জন্য এই ম্যাপ থেকে দুটি চ্যালেঞ্জিং প্রশ্ন তৈরি করো।	

ঢাল (slope)

তোমরা নদীর পাড়ের ঢাল বা পাহাড়ের ঢাল দেখেছ? অথবা শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের সিঁড়ি দেখেছ নিশ্চয়ই। সমতল ভূমির সাপেক্ষে নদীর পাড় ক্রমশ নিচু হয়ে যায়। আবার পাহাড় ও সিঁড়ি সমতল ভূমির সাপেক্ষে ক্রমশ উঁচু হয়ে যায়। সমভূমির সাপেক্ষে ক্রমশ উঁচু বা নিচু হওয়া বিষয়টিকে আমরা ঢাল হিসেবে চিনি। সহজ কথায়, ঢাল বলতে বোঝায় কোনো কিছু ক্রমশ নিচু বা উঁচু হওয়া ।

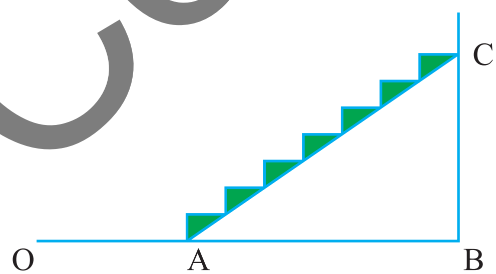

চিত্র : ৬.১৩ নদীর ঢালু পাড়


চিত্র : ৬.১৪ পাহাড়ের ঢাল


চিত্র : ৬.১৫ স্লাইড

স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাপেক্ষে কোনো সরলরেখা কতটুকু আনত তাকেই ঢাল (slope) হিসেবে বিবেচনা করা হয়। স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে ঢাল নির্ণয় করা একটি গুরুত্বপূর্ণ কাজ। তোমরা কি জানো আনত বলতে কী বোঝায়? আনত হলো আনুভূমিক দূরত্বের সঙ্গে উল্লম্ব দূরত্বের অনুপাত। অর্থাৎ আনুভূমিকভাবে এক একক দূরত্ব অতিক্রম করলে তার সাপেক্ষে উল্লম্ব দিকে কতটুকু পরিবর্তন হয়, তার পরিমাণ হলো ঢাল। পাশে একটি সিঁড়ির চিত্র দেওয়া আছে। এর আনুভূমিক দূরত্ব AB, এবং উল্লম্ব দূরত্ব BC। তাহলে,

$$\text{সিঁড়ির ঢাল} = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{উলম্ব দূরত্ব}}{\text{আনুভূমিক দূরত্ব}}$$



চিত্র : ৬.১৬

স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ঢাল নির্ণয়

আমরা যদি অক্ষরেখাদ্বয় দ্বারা গঠিত সমতলে অর্থাৎ xy-সমতলে দুইটি বিন্দু $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ নেই, তবে PQ রেখার ঢাল নিচের চিত্র থেকে বের করতে পারি।

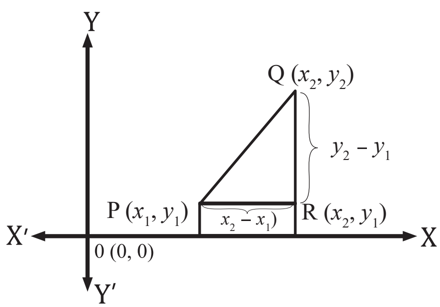
$$PQ \text{ রেখার ঢাল } = \frac{RQ}{PR} = \frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

সুতরাং আমরা বলতে পারি,

যদি দুইটি বিন্দু $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ হয়,

তবে P ও Q বিন্দুর সংযোগ রেখার ঢাল m হলে,

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ।

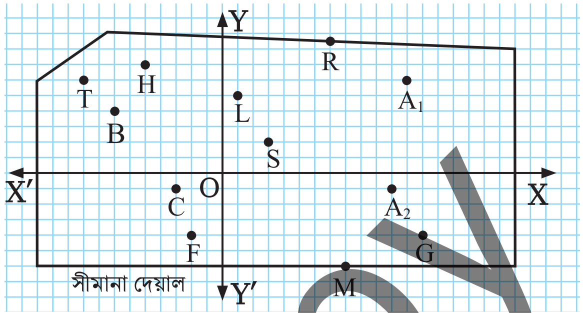


চিত্র : ৬ ১৭

ঢালকে x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে আনত বিবেচনা করা হয়। ফলে সরলরেখার বিভিন্ন অবস্থানের কারণে ঢাল (বা আনতি বা নতি) ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে।

দলগত কাজ

অবস্থান মানচিত্র তৈরিতেও ঢালের ব্যবহার হয়ে থাকে। শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের অবস্থান মানচিত্র (চিত্র ৬.২) এর বিভিন্ন স্থাপনার বিন্দুর স্থানাঙ্ক চিত্র ৬.১৮ এর মাধ্যমে গ্রাফ পেপারে উপস্থাপন করা আছে। এই চিত্র থেকে নিম্নের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।



চিত্র: ৬.১৮

1) নিচের বিন্দুদ্বয় দিয়ে গমনকারী সরলরেখার ঢাল বের করো।

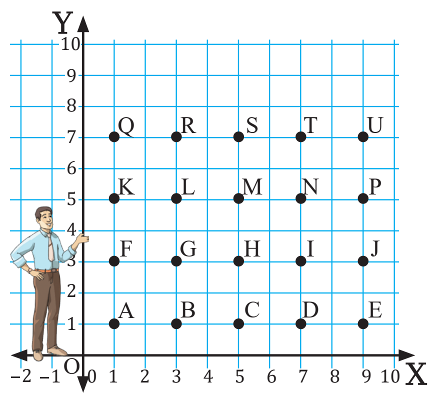
ক) S এবং A_1 খ) S এবং A_2 গ) C এবং G ঘ) F এবং T

2) তোমাদের ইচ্ছেমতো যে কোনো তিন জোড়া বিন্দুর সংযোগ রেখার ঢাল নির্ণয় করো।

সরলরেখার সমীকরণ

x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ

চিত্র : ৬.৩-এ শিক্ষক শিক্ষার্থীদের ছবিটিকে যদি আমরা বিন্দুর মাধ্যমে প্রকাশ করি, তাহলে আমরা চিত্র : ৬.১৯ এর অনুরূপ পাব। একজন শিক্ষকের সাপেক্ষে বিভিন্ন শিক্ষার্থীর অবস্থানের বিন্দুগুলোকে বিভিন্ন অক্ষর (letter) দিয়ে চিহ্নিত করা হয়েছে। পর্যবেক্ষণ করে বলো তো A(1, 1), B(3, 1), C(5, 1), D(7, 1), E(9, 1)



চিত্র: ৬.১৯

বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্কগুলোর মধ্যে কোনো মিল খুঁজে পাও কি না?

কী মিল খুঁজে পেলে তা এখানে লেখো।

তোমরা দেখবে যে, উক্ত বিন্দুগুলোর কোটি একই। এবার এই বিন্দুগুলো যদি তুমি ক্রমান্বয়ে সংযোগ করো, তাহলে একটি সরল রেখা দেখতে পাবে। মজার ব্যাপার হলো, এই সরলরেখাটির সকল বিন্দুতে কোটি সমান

এবং তা হলো 1 । সুতরাং আমরা লিখতে পারি, কোটি $y = 1$ এবং এই সরলরেখাটিকে আমরা বীজগাণিতিকভাবে লিখতে পারি

$$y = 1$$

এটি হলো একটি সরলরেখার সমীকরণ। দেখতে পাচ্ছ এই সরল রেখাটি x-অক্ষের সমান্তরাল।

একক কাজ

চিত্র ৬.১৯ অনুযায়ী সমস্যাগুলোর সমাধান করো।

১ F(1, 3), G(3, 3), H(5, 3), I(7, 3), J(9, 3) বিন্দুগুলোর সংযোগ সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

২ A, B, C, D, E বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

৩ K, L, M, N, P বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

৪ Q, R, S, T, U বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো।

এখন কী বলতে পারবে, x-অক্ষের উপর যে কোনো বিন্দুর কোটি কত? x-অক্ষের উপর যে কোনো বিন্দুর কোটি 0, অর্থাৎ x-অক্ষের সমীকরণ $y = 0$ ।

এবার বলো তো (3, –4), (5, –4), (7, –4) বিন্দুগুলোর সংযোগ সরল রেখার সমীকরণ কী হবে? একটু খেয়াল করে দেখ, এখানেও সবকটি বিন্দুর কোটি সমান, কিন্তু ঋণাত্মক। সকল বিন্দুর কোটি –4। এইসব বিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নিচে লেখো।

জোড়ায় কাজ

নিচে উল্লেখিত কোন কোন বিন্দুগামী সরলরেখা x অক্ষের সমান্তরাল হবে, তাদেরকে চিহ্নিত করে নিচের ঘরে লিখো।

বিন্দুর স্থানাঙ্ক

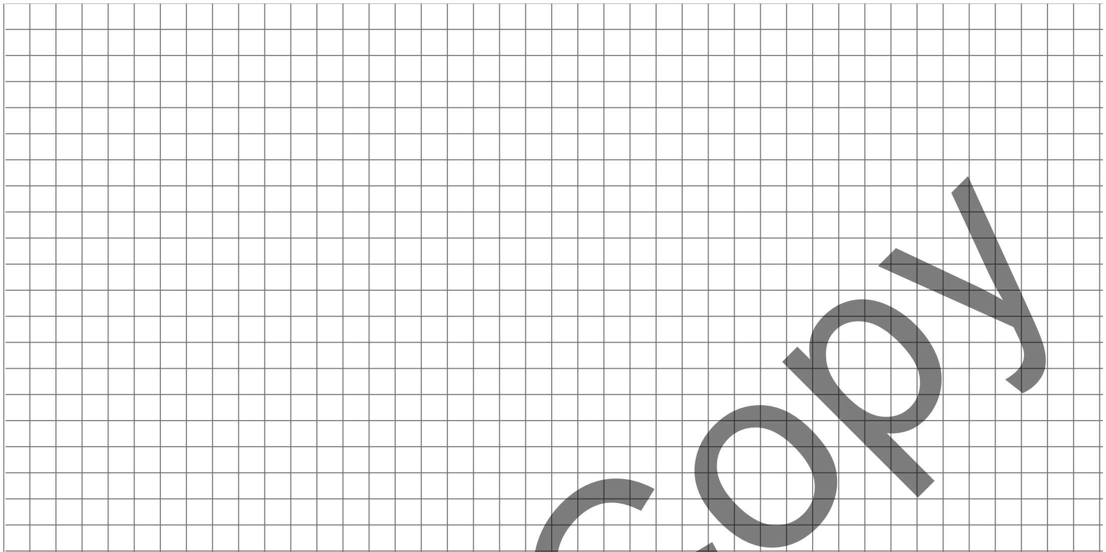
A(3, –3), B(4, 4), C(–6, 4), D(–4, 7),

E(–8, 4), G(-10, –3), H(12,17),

I(13, –3), J(15, 7), K(17, 3),

L(18, 4), M(20, 7)

বিন্দুগুলোকে গ্রাফ পেপারে (চিত্র ৬.২০) উপস্থাপন করো এবং x-অক্ষের সমান্তরাল বিন্দুগুলো সংযোগ করো। উপরের ঘরে লেখা তোমাদের উত্তর গ্রাফ পেপারের সঙ্গে মিলিয়ে দেখো।



চিত্র: ৬.২০

উপরের পর্যবেক্ষণগুলো থেকে তোমরা কি কোনো সাধারণ সিদ্ধান্ত নিতে পার? হ্যাঁ, আমরা একটি সিদ্ধান্ত নিতে পারি-

যে সকল বিন্দুর কোটি একই, তাদেরকে ক্রমান্বয়ে যোগ করলে x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা পাওয়া যায়।

y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ

x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ বের করার মতো আমরা y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ বের করতে পারি। চিত্র ৬.১৯-তে A, F, K, Q বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক নিচে লেখো।

লক্ষ করলে দেখবে যে, উক্ত বিন্দুগুলোর ভুজ 1 । এবার এই বিন্দুগুলো যদি তুমি ক্রমান্বয়ে সংযোগ করো, তাহলে তোমরা একটি সরলরেখা পাবে। এই সরলরেখাটির সমীকরণ কী হবে বলো তো? এই সরলরেখাটির সকল বিন্দুতে ভুজ সমান এবং তা হলো 1 । সুতরাং আমরা লিখতে পারি, ভুজ $x = 1$ এবং এই সরলরেখাটিকে আমরা বীজগাণিতিকভাবে লিখতে পারি

$$x = 1$$

এটি হলো একটি এই সরলরেখার সমীকরণ। দেখতে পাচ্ছ এই সরলরেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল।

জোড়ায় কাজ

নিচে উল্লেখিত কোন কোন বিন্দুগামী সরলরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল হবে, তাদেরকে চিহ্নিত করে নিচের ঘরে লেখো।

বিন্দুর স্থানাঙ্ক :

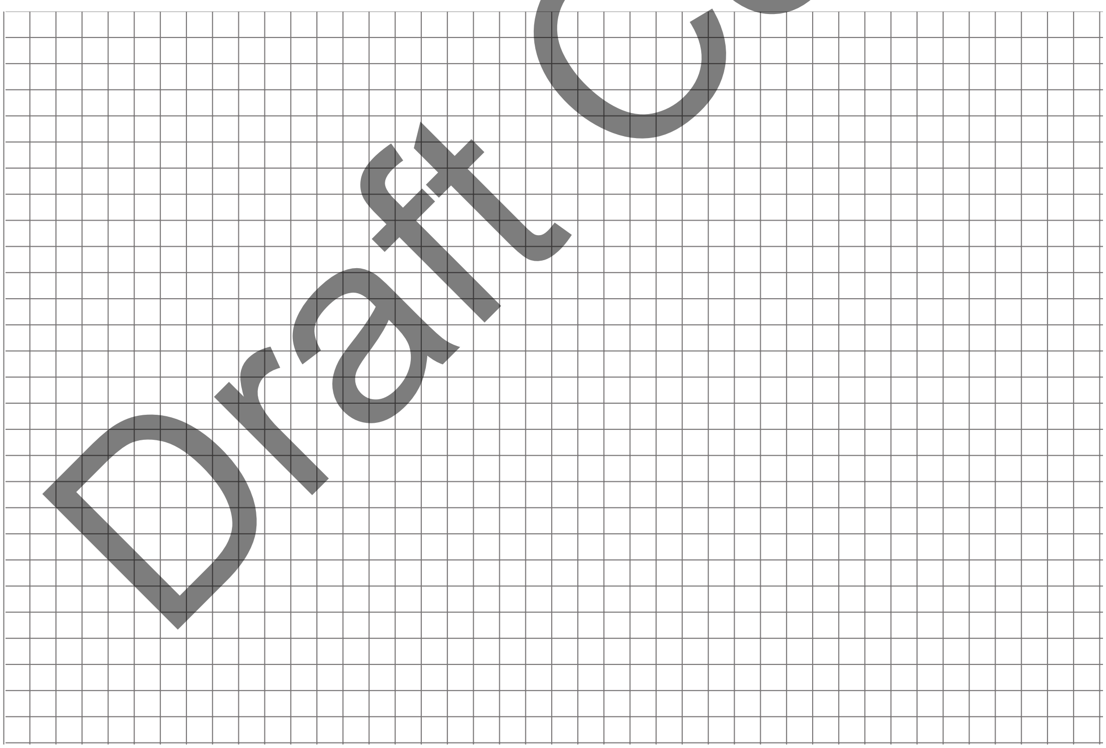
A(–3, –3), B(4, 4), C(3, –6), D(7, 7),

E(4, –6), G(7, –3), H(4, –7), I(-3, 8),

J(7, 12), K(4, 11), L(7, 4), M(–3, 0),

N(0, 6), P(0, –6)

বিন্দুগুলোকে গ্রাফ পেপারে (চিত্র : ৬.২১) উপস্থাপন করো এবং y-অক্ষের সমান্তরাল বিন্দুগুলো সংযোগ করো। উপরের ঘরে লেখা তোমাদের উত্তর গ্রাফ পেপারের সঙ্গে মিলিয়ে দেখো।



চিত্র: ৬.২১

এবার বলো তো, y-অক্ষের সমীকরণ কত? তোমার উত্তর নিচে লেখো।

উপরের পর্যবেক্ষণগুলো থেকে তোমরা কি কোনো সাধারণ সিদ্ধান্ত নিতে পার? হ্যাঁ, আমরা একটি সিদ্ধান্ত নিতে পারি-

যে সকল বিন্দুর ভুজ একই, তাদেরকে ক্রমান্বয়ে যোগ করলে y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা পাওয়া যায়।

জোড়ায় কাজ

$x = 6, x = -5, y = 3, y = -4$ সরলরেখাগুলো অঙ্কন করো। সরলরেখাগুলো দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রের শীর্ষ বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্কগুলো চিহ্নিত করো এবং ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল বের করো।

অক্ষের সমান্তরাল নয় এমন সরলরেখার সমীকরণ

এখন অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল নয় এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে চাই। অবস্থান মানচিত্রে (চিত্র : ৬.২২) $S(3, 2)$ এবং A_1 $(12, 6)$ বিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ বের করতে হবে। ধরি, SA_1 রেখার উপর যে কোনো একটি বিন্দু $P(x, y)$. ঢালের সূত্র অনুযায়ী-

SP রেখার ঢাল $= \frac{y-2}{x-3}$

এবং SA_1 রেখার ঢাল $= \frac{6-2}{12-3} = \frac{4}{9}$

যেহেতু SP এবং SA_1 একই সরলরেখা, সুতরাং তাদের ঢালদ্বয় সমান।

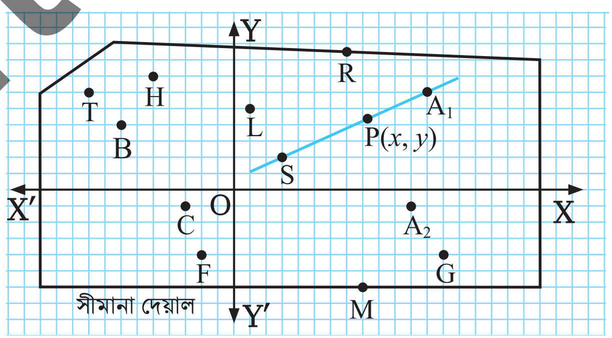
$\therefore \frac{y-2}{x-3} = \frac{4}{9}$

বা, $4x - 12 = 9y - 18$

বা, $4x - 9y - 12 + 18 = 0$

$\therefore 4x - 9y + 6 = 0$

এটিই SA_1 সরলরেখার সমীকরণ।



চিত্র: ৬.২২

জোড়ায় কাজ

চিত্র : ৬.২২ এর ক্ষেত্রে-

১) মূলবিন্দু এবং A_2 বিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ বের করো।

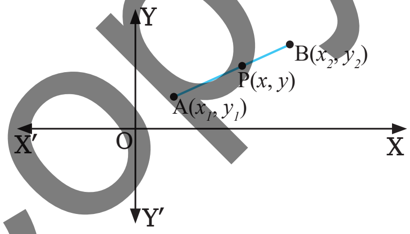
২) CL সরলরেখার সমীকরণ বের করো।

সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ

চলো এবার দুই বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করার চেষ্টা করি। xy-সমতলে $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ দুইটি বিন্দু নিই। আমরা AB সরলরেখার সমীকরণ বের করব। ধরি, AB সরলরেখার উপর যে কোনো একটি বিন্দু $P(x, y)$.

AB রেখার ঢাল $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

এবং AP রেখার ঢাল $= \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$



চিত্র: ৬.২৩

যেহেতু AB এবং AP একই সরলরেখা, সুতরাং তাদের ঢালদ্বয় সমান। অর্থাৎ,

$$\text{AP রেখার ঢাল} = \text{AB রেখার ঢাল}$$

$$\text{বা, } \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{বা, } \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$\therefore \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

এটিই দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ।

> (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$

একক কাজ

১) $(3, 4)$ এবং $(2, -3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ বের করো।

২) $(0, 0)$ এবং $(-7, -3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ বের করো।

ঢালের মাধ্যমে সরলরেখার সমীকরণ

উপরের (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ থেকে পাই,

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

বা, $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \text{m}$ [এখানে $\text{m} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ হলো (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল]

বা, $y - y_1 = \text{m}(x - x_1)$।

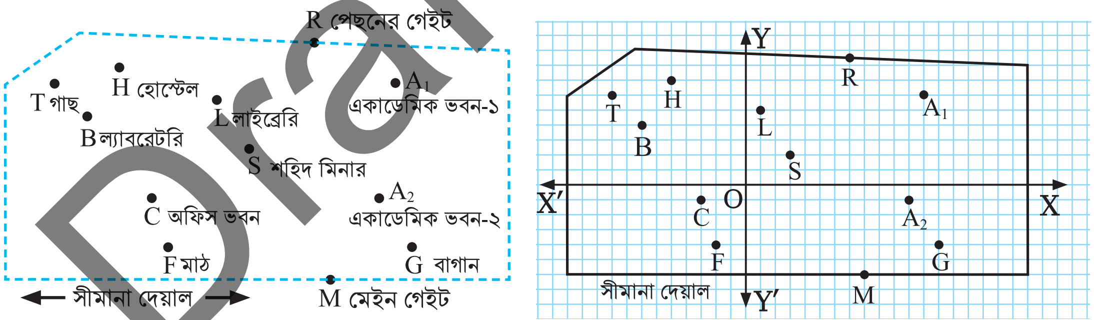
> m ঢালবিশিষ্ট (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ
>
> $$y - y_1 = \text{m}(x - x_1)$$

একক কাজ

এমন একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যার ঢাল 3 এবং (0, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

দলগত কাজ

এই অভিজ্ঞতার শুরুতে উপস্থাপিত প্রতিষ্ঠানের অবস্থান মানচিত্র গ্রাফ পেপারে উপস্থাপন করা আছে। শিক্ষকের নির্দেশমতো দলে বিভক্ত হয়ে তোমরা নিচের প্রশ্ন/সমস্যাগুলোর সমাধান করো।



চিত্র: ৬.২৪

ক) ল্যাবরেটরি, লাইব্রেরি, হোস্টেল, মেইন গেইট এর স্থানাঙ্ক বের করো।

খ) একাডেমিক ভবন-১ এবং মাঠ কোন চতুর্ভাগে অবস্থিত?

গ) হোস্টেল এবং শহীদ মিনারের অবস্থান দিয়ে গমনকারী সরলরেখার ঢাল কত?

ঘ) মেইন গেইট থেকে হোস্টেলের দূরত্ব কত?

ঙ) মেইন গেইট থেকে সবচেয়ে দূরে কোন স্থাপনাটি রয়েছে?

চ) হোস্টেল থেকে কোন গেইটটি নিকটবর্তী? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

ছ) অফিস ভবন এবং শহীদ মিনার দিয়ে গমনকারী সরলরেখার ঢালের সঙ্গে লাইব্রেরি এবং পেছনের গেইট দিয়ে গমনকারী সরলরেখার ঢালের তুলনা করো।

জ) প্রতিষ্ঠানের সীমানার মোট দৈর্ঘ্য কত?

ঝ) মাঠ এবং অফিস ভবন দিয়ে গমনকারী সরল রেখার সমীকরণ বের করো।

প্রজেক্ট ওয়ার্ক

শ্রেণিশিক্ষকের নির্দেশনা মোতাবেক

১) তোমাদের প্রতিষ্ঠানের একটি অবস্থান মানচিত্র গ্রাফ কাগজে প্রস্তুত করো।

২) বিদ্যালয়ের যে কোনো সুবিধাজনক জায়গায় মূলবিন্দু ধরে অক্ষদ্বয় চিহ্নিত করো।

৩) তোমার সুবিধামতো কমপক্ষে পাঁচটি স্থান বা স্থাপনা মানচিত্রে উল্লেখ করো।

৪) সবচেয়ে কাছের দুটি স্থাপনা এবং সবচেয়ে দূরের দুইটি স্থাপনার দূরত্ব নির্ণয় করো।

৫) প্রধান শিক্ষকের অফিস ঘরের অবস্থান স্থানাঙ্কে প্রকাশ করো।

শিক্ষকের নির্দেশনা মোতাবেক একটি নির্দিষ্ট দিনে তোমাদের প্রজেক্টটি বিদ্যালয়ে প্রদর্শন করো।

অনুশীলনী

১. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো যার ঢাল -2 এবং রেখাটি $(4, -5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

২. $A(3, -3)$ ও $B(4, -2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করো। সরলরেখাটির ঢাল কত?

৩. দেখাও যে, $A(0, -3), B(4, -2)$ এবং $C(16, 1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ।

৪. $A(1, -1), B(t, 2)$ এবং $C(t^2, t+3)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে t এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় করো।

৫. $A(2, 2), B(10, 1), C(11, 9)$ এবং $D(3, 10)$ এই বিন্দুগুলো লেখচিত্রে বসাও এবং AB, BC, CD, AD রেখাংশ আঁকো। এই রেখাগুলো দ্বারা কী ধরনের ক্ষেত্র তৈরি হয়েছে? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

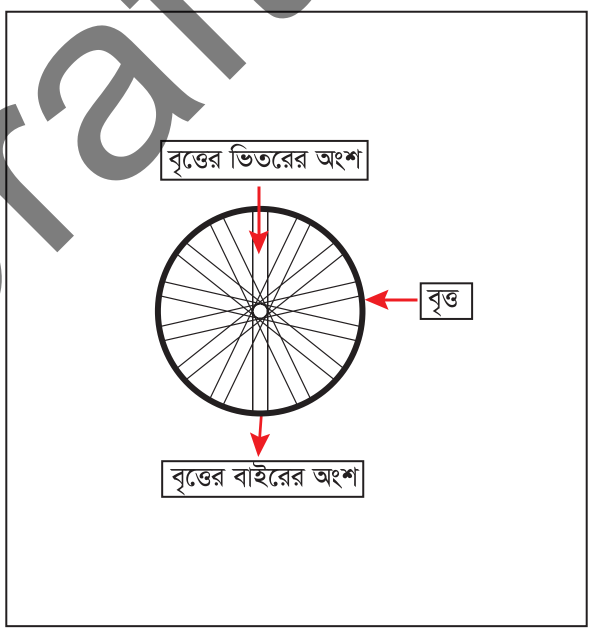
৬. তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(-2, 1), B(10, 6)$ এবং $C(a, -6)$. যদি $AB = BC$ হয়, তবে a এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় করো। a এর প্রতিটি মানের জন্য গঠিত ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

৭. চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(-1, 1), B(2, -1), C(0, 3)$ ও $D(3, 3)$। বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

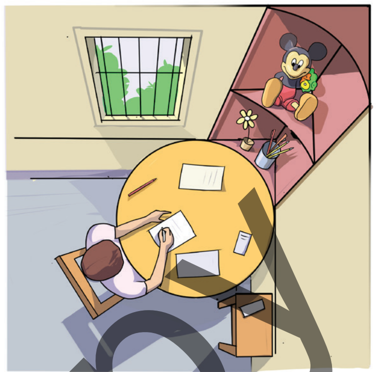
বৃত্তের খুঁটিনাটি

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে

- বৃত্তচাপ
- বৃত্ত ও বৃত্তক্ষেত্রের বিভিন্ন অংশ
- কেন্দ্রস্থ কোণ ও বৃত্তস্থ কোণ
- বৃত্ত সংক্রান্ত বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য
- বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ
- বৃত্তের স্পর্শক
- বৃত্ত সংক্রান্ত পরিমাপ



বৃত্তের খুঁটিনাটি

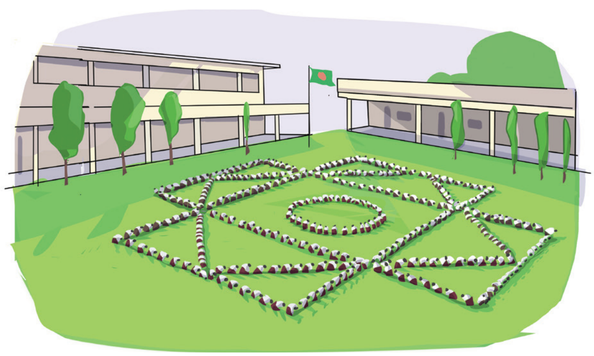


মনে করো, তুমি তোমার পড়ার ঘরটিকে সুন্দর করে সাজাতে চাও। তাই পরিকল্পনা করে ঘরের বিভিন্ন স্থানে বিভিন্ন আকৃতির আসবাবপত্র রাখলে। মনে করো, তোমার একটি বৃত্তাকার টেবিল আছে। তোমার বৃত্তাকার টেবিলকে ঘরের এক কোণায় এমনভাবে বসালে যেন টেবিলটির একপাশ জানালাযুক্ত দেয়ালের সঙ্গে এবং অন্যপাশ অন্য দেয়ালের সঙ্গে মিশে থাকে।

কিন্তু তোমার প্রিয় পড়ার টেবিলটির উপরের তল বৃত্তাকৃতির হওয়ায় দুই দেওয়াল ও টেবিলের কোণার জায়গাটি ফাঁকা রয়ে গেল। কোণার জায়গাটি ফাঁকা থাকায় টেবিলের টুকিটাকি জিনিসপত্র মাঝেমধ্যেই নিচে পড়ে যায়। তাই কোণার ঐ ফাঁকা জায়গায় যদি একটি শেলফ থাকত, তাহলে তুমি তোমার পছন্দের বিভিন্ন উপহার সামগ্রীসহ প্রয়োজনীয় টুকিটাকি জিনিসপত্রগুলো হাতের কাছেই রাখতে পারতে, তাই না? তোমার চাওয়া শেলফটিতে একাধিক তাক থাকবে। তাই তাকগুলোর আকৃতি এমন হওয়া দরকার যার সামনের অংশ বৃত্তের মতো এবং কাঠের সঙ্গে লাগানো অংশ কোণাকৃতির। সমস্যা হলো এই ধরনের আকৃতি সম্পর্কে তোমার কোনো ধারণা নেই।

তাহলে, এরূপ আকৃতি সম্পর্কে আমাদের জানা দরকার তাই না? এজন্য আমাদের বৃত্ত, বৃত্তের নানারকম বৈশিষ্ট্য, বৈশিষ্ট্যগুলোর গাণিতিক সম্পর্ক ও পরিমাপ কেমন হবে সে সম্পর্কে খুঁটিনাটি জানতে হবে।

তুমি তোমার শিক্ষাপ্রতিষ্ঠান, বাড়ি, ব্যবহার্য জিনিসপত্র, চলাফেরার পথের নানান জায়গায় বিভিন্ন রকমের জ্যামিতিক আকৃতি দেখে থাকো। এই আকৃতিগুলো কখনো প্রাকৃতিকভাবে তৈরি আবার কখনো মানুষ তার প্রয়োজনে তৈরি করে থাকে। এই যেমন বার্ষিক ক্রীড়া অনুষ্ঠান ও বিভিন্ন জাতীয় দিবসগুলোতে তোমরা বিভিন্ন রকমের ডিসপ্লে করে থাকো।

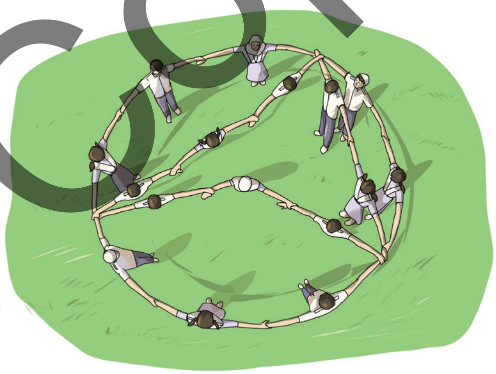


আর এই কাজটি তোমরা অনেকগুলো জ্যামিতিক আকৃতির সমন্বয়েই করে থাকো, তাই না? চলো আজ আমরা ক্লাসের সবাই মিলে মাঠে গিয়ে ডিসপ্লে করে আমাদের প্রিয় বাংলাদেশের পতাকা (স্ট্যান্ডসহ) দেখানোর কাজটি করি। কিন্তু কাজটি কীভাবে করব?

এক্ষেত্রে পতাকার অনুপাত অনুযায়ী আয়তাকার ও বৃত্তাকার আকৃতির সম্পর্ক আমাদের জানতে হবে। আমরা ইতোমধ্যেই আয়তাকার আকৃতি সম্পর্কে জেনেছি। এখন একটি ডিসপ্লে দেখানোর মাধ্যমে আমরা বৃত্তাকার আকৃতি সম্পর্কে জানার চেষ্টা করব।

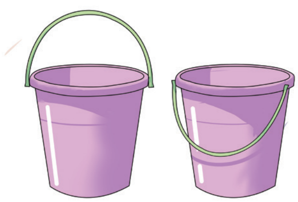
বৃত্ত একটি সমতলীয় জ্যামিতিক চিত্র যার বিন্দুগুলো কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরত্বে অবস্থিত। আর এই নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরত্ব বজায় রেখে কোনো বিন্দু যে আবদ্ধ পথ চিত্রিত করে তাকেই বৃত্ত বলে। ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে বলা হয় কেন্দ্র এবং কেন্দ্র থেকে বৃত্তস্থ কোনো বিন্দুর দূরত্বকে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ বলে।

দলগত ডিসপ্লে কাজের নির্দেশনা – প্রথমে তোমরা ১৫/২০ জন শিক্ষার্থী একজন আরেকজনের হাত ধরে একটি বৃত্ত বানাও। অন্য একজন বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুতে দাঁড়াও। অবশিষ্ট শিক্ষার্থীরা বিভিন্নভাবে পরস্পরের হাত টানটান করে ধরে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, ব্যাস, জ্যাসহ অন্যান্য বৈশিষ্ট্যগুলো প্রদর্শনের মাধ্যমে তৈরি করো। নিজেদের মধ্যে আলোচনা করে জানার চেষ্টা করো বৃত্তের কোন কোন তথ্যগুলো তোমরা তৈরি করলে এবং তথ্যগুলোর মধ্যেকার পারস্পরিক সম্পর্ক কী হতে পারে। প্রয়োজনে বিষয় শিক্ষকের সঙ্গে কথা বলে জেনে নাও। এবার স্ট্যান্ডসহ ঝটপট আমাদের প্রিয় পতাকাটির ডিসপ্লে করো।



বৃত্তের ব্যাস ও জ্যা সম্পর্কে জানা প্রয়োজন কেন?

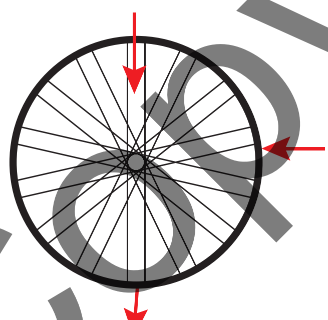
পাশের ছবিটি দেখে কিছু অনুধাবন করতে পারছ কি? ভেবে দেখো তো, বালতির হাতলটি কেন বালতির বৃত্তাকার খোলা মুখের ব্যাস বরাবর দুই প্রান্তে আটকানো থাকে? যদি তা না হতো তবে কী কোনো সমস্যা হতো? বালতিতে হাতল না থাকলে পানিপূর্ণ বালতি তুমি দুই হাতে সাধারণত কোথায় ধরে এক জায়গা থেকে আরেক জায়গায় নিয়ে



যাও? এমন অনেক উদাহরণ তোমার চারপাশে দেখতে পাবে যেখানে পাত্রের ভারসাম্য রক্ষার জন্য পাত্রটির মাঝ বরাবর দুই প্রান্তেই একটি হাতল বা ধরার ব্যবস্থা থাকে।

তুমি ব্যবহার করো বা তোমার দেখা কয়েকটি বস্তু বা পাত্রের নাম লেখ, যার খোলা মুখের মাঝ বরাবর হাতল থাকে অথবা কাজের সময় মাঝ বরাবর ধরতে হয়।

এবার মাঠে প্রদর্শিত তথ্যগুলো সম্পর্কে তোমরা যে ধারণা পেয়েছ, সেগুলো আরও ভালোভাবে বোঝার জন্য প্রত্যেককেই আরও একটি খেলা খেলতে হবে। খেলার জন্য বিভিন্ন আকারের কয়েকটি বৃত্তাকার রিং (চাবির রিং, চুড়ি, প্লেট,...ইত্যাদি), পুরাতন ক্যালেন্ডার, আর্ট পেপার, ককশিট, মাস্কিং টেপ বা অ্যাডহেসিভ টেপ, স্কেল, কম্পাস, কাঁচি, পিন, রাবার এবং ছোটো-বড়ো নানান দৈর্ঘ্যের কয়েকটি সোজা কাঠি লাগবে। আর খেলাটি হলো বৃত্তাকার রিং এর মধ্যে নানাভাবে কাঠি রেখে কী কী পাওয়া যায়, তা দেখে বৃত্তের বিভিন্ন তথ্য জানা ও সে অনুযায়ী মডেল তৈরি করা।



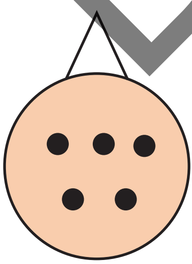
রফিক একটি পুরাতন ক্যালেন্ডারের পিছনের সাদা অংশের উপর বাস্কেট বল খেলার রিং রেখে প্রথমে একটি বৃত্ত এবং পরে তার সাইকেলের একটি চাকা আঁকে। চাকাটি ক্যালেন্ডারকে তিনটি অংশে বিভক্ত করেছে।

ক) বৃত্ত (স্টিলের বৃত্তাকার ফ্রেমসহ চাকার রাবারের অংশ)

খ) বৃত্তের ভিতরের অংশ (চাকার স্পোকগুলো যে তলে আছে)

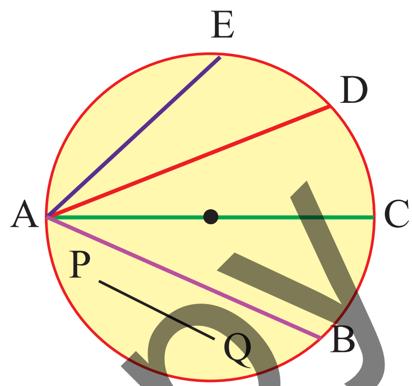
গ) বৃত্তের বাইরের অংশ (চাকার বাইরে ক্যালেন্ডারের অবশিষ্ট অংশ)

বৃত্তের ভিতরের যে এলাকা তৈরি হলো তাকে আমরা **বৃত্তাকার ক্ষেত্র** (circular region) বলে থাকি।



অহনা একটি মোটা ককশিটের উপর রিং রেখে রিং এর মাপে কলম দিয়ে একটি **বৃত্তক্ষেত্র** বানায়। তারপর বৃত্তক্ষেত্রাকার চাকতিটি কেটে নেয়। এবার চাকতিটিতে একটি আংটা ও কয়েকটি পেরেক আটকে পাশের ছবির মতো তৈরি করে। সে মনে মনে ঠিক করে, এটি দেয়ালে টাঙিয়ে ঘরের চাবিগুলো ঝুলিয়ে রাখবে, যেন চাবিগুলো না হারায়।

অমিয়া আর্ট পেপারে একটি প্লেট বসিয়ে একটি বৃত্ত তৈরি করে। বৃত্ত ঠিকই বানাতে পেরেছে কিন্তু কেন্দ্র চিহ্নিত করতে পারল না। তোমরাতো জানো একটি বৃত্তের কেন্দ্র কীভাবে নির্ণয় করা যায়? অমিয়াও কাগজটি কেটে বৃত্তাকার ক্ষেত্র আলাদা করে এবং সমান দুই ভাঁজ করে কেন্দ্র চিহ্নিত করে। এবার বৃত্তাকার কাগজের উপর রিংটি রেখে এর ভিতরে বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের সোজা কাঠিগুলো চিত্রের মতো বসিয়ে কাঠিগুলোর দুই মাথা টেপ দ্বারা আটকে দেয় এবং কাঠির মাথাগুলো A, B, C, D ও E দ্বারা চিহ্নিত করে। কাঠিগুলোর এক মাথা A বিন্দুতে এবং অপর মাথাগুলো যথাক্রমে B, C, D ও E বিন্দুগুলোর সঙ্গে যুক্ত হয়ে AB, AC, AD ও AE সরলরেখাগুলোর মতো উৎপন্ন করে। এদের মধ্যে একটি কাঠি AC আবার কেন্দ্র দিয়ে যায় এবং আরেকটি কাঠি PQ বেশ ছোটো যা বৃত্তক্ষেত্রের মধ্যে রয়েছে। এটি বৃত্তকে স্পর্শ করেনি। অমিয়া এবার স্কেল দিয়ে কাঠিগুলোর মাপ নিয়ে মাপগুলো খাতায় লিখল। ভেবে বলো তো, কোন কাঠির দৈর্ঘ্য সবচেয়ে বেশি হবে? এবার স্কেল, কম্পাস, পেন্সিল ব্যবহার করে প্রত্যেকেই নিজ নিজ খাতায় মডেলটি আঁকো। তারপর প্রদত্ত ৭.১ ছকের সঠিক ঘরটিতে টিক চিহ্ন দাও। উত্তরের সপক্ষে অবশ্যই যুক্তি প্রদান করতে হবে।



ছক ৭.১

রেখাংশ	জ্যা	ব্যাস	যুক্তি
AB	√		বৃত্তের কেন্দ্র বিন্দু দিয়ে যায়নি।
AC			
AD			
AE			
PQ			

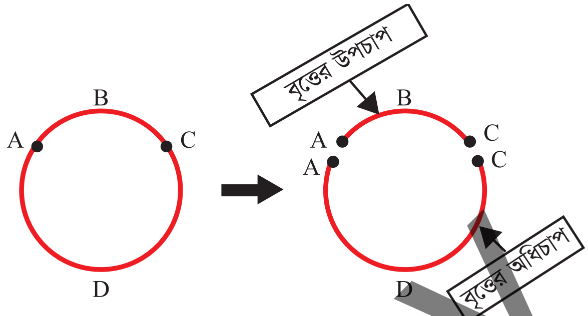
রেখাংশগুলোর মধ্যে নানারকম সম্পর্ক খুঁজি :

ক) ব্যাস বৃত্তের একটি ....। কিন্তু বৃত্তের যে-কোনো জ্যা-ই .... নয়।

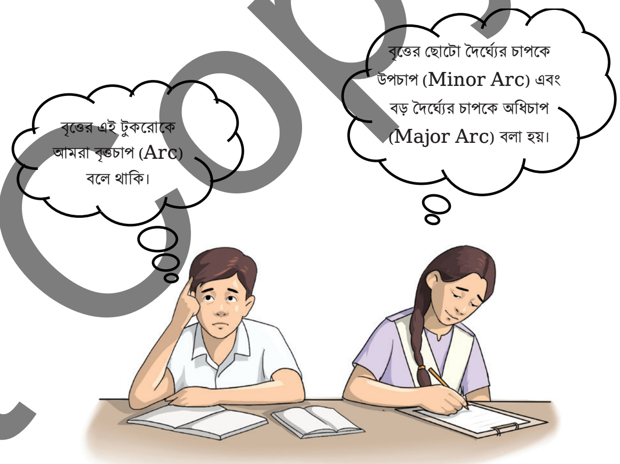
খ) বৃত্তের ব্যাসই .... জ্যা।

বৃত্তচাপ (Arc)

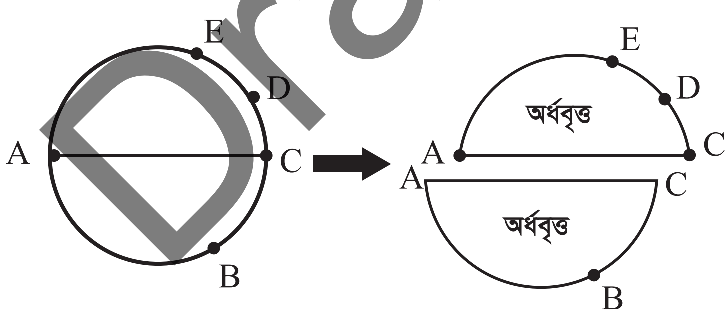
মিতা তার খাতার উপর চুড়ি রেখে একটি বৃত্ত আঁকে। কিন্তু বৃত্ত আঁকার পর অসাবধানতাবশত চুড়িটি পড়ে গিয়ে দু টুকরো হয়ে যায়। কিন্তু সে মন খারাপ না করে টুকরো দুটিকে কুড়িয়ে আবার পাশের ছবির মতো চিত্র আঁকে। চুড়ির ছোটো টুকরোটিকে ABC এবং বড়ো টুকরোটিকে ADC দ্বারা চিহ্নিত করে। ভেবে বলো তো বৃত্তের এই টুকরো দুটিকে কী কী বলা যায়?



যদি চুড়ির টুকরো দুটির দৈর্ঘ্য সমান হতো, তবে যে কোনো একভাগকে আমরা কী বলতে পারতাম?



এই গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্নটির উত্তর জানার জন্য অমিয়ার তৈরি করা মডেলটি আবার পর্যবেক্ষণ করতে হবে। মডেলটিতে AC কাঠি বৃত্তের ব্যাস যার A ও C বিন্দু দুটি বৃত্তের উপর অবস্থিত। এবার একখন্ড সুতা বৃত্তের উপর ঘুরিয়ে AC কাঠি দ্বারা বিভক্ত বৃত্তটির AEDC এবং ABC চাপ দুটির দৈর্ঘ্য আলাদাভাবে মেপে দেখো। নিশ্চয়ই AC কাঠিটি বৃত্তটিকে সমান দুইভাগে ভাগ করেছে, তাই না? সেক্ষেত্রে যে কোনো একভাগকে আমরা **অর্ধবৃত্ত** (semi-circle) বলব। আর আমরা তো জানি, বৃত্তটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য হলো বৃত্তের **পরিধি** (circumference)।



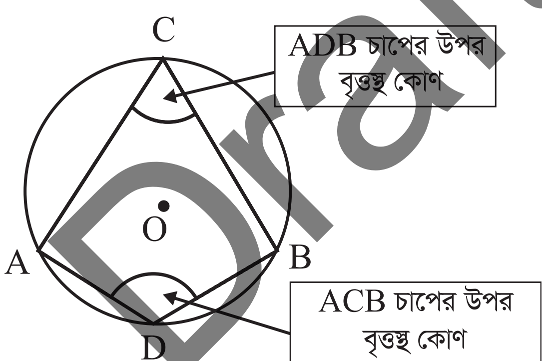
বৃত্তের আরও কী কী অংশ আছে, চলো জেনে নিই। তুমি তোমার খাতার উপর তোমার আনা মাস্কিং টেপ বা অ্যাডহেসিভ টেপ রেখে দুইটি বৃত্ত এঁকে নাও। এবার বৃত্তক্ষেত্র দুটি কেটে যথারীতি দুবার ভাঁজ করে এদের কেন্দ্র O দ্বারা চিহ্নিত করো। একটি বৃত্তক্ষেত্রে ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা AB আঁকো। লক্ষ করো AB জ্যা বৃত্তক্ষেত্রটিকে দুটি ভাগে

ভাগ করেছে। প্রতিটি ভাগকে আমরা কী বলতে পারি? প্রতিটি ভাগকে আমরা **বৃত্তাংশ** (segment) বলব। কিন্তু ক্ষেত্র দুটো কি সমান মনে হয়? না, ক্ষেত্র দুটোর একটি বড়ো এবং আরেকটি ছোটো হয়েছে। বড়ো বৃত্তাংশটিকে **অধি-বৃত্তাংশ** (major segment) এবং ছোটো বৃত্তাংশটিকে **উপ-বৃত্তাংশ** (minor segment) বলা হয়। তোমার পছন্দমতো দুই রকমের রং দিয়ে ক্ষেত্রদুটো রং করে নাও।

অপর বৃত্তক্ষেত্রের কেন্দ্র থেকে পাশের চিত্রের মতো OA এবং OB দুটি ব্যাসার্ধ আঁকো। এবার ভেবে দেখো তো, এই OA ও OB ব্যাসার্ধ এবং AB চাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে কী বলা যায়? এদেরকে **বৃত্তকলা** (Sector) বলতে পারি। বড়ো বৃত্তকলাকে অধি-বৃত্তকলা (Major Sector) এবং ছোটো বৃত্তকলাকে উপ-বৃত্তকলা (Minor Sector) বলা যেতে পারে।

যদি AB জ্যা ব্যাস হয় তবে বৃত্তাংশ দুটি কীরূপ হবে এবং এদের কী নাম দেওয়া যায়, চিত্র এঁকে সিদ্ধান্ত নাও।

বৃত্তস্থ কোণ (Inscribed Angle)



সাদা ককশিটে পেন্সিল-কম্পাস দিয়ে একটি বৃত্ত এঁকে নাও। বৃত্তটির কেন্দ্র O দ্বারা চিহ্নিত করো। এবার কাঠি দুইটি এমনভাবে ককশিটে বসাও যেন এদের এক মাথা C বিন্দুতে বৃত্তের উপর একত্রে এবং অপর মাথা দুটি বৃত্তের উপর A ও B বিন্দুতে থাকে। লক্ষ করো ADB চাপের বিপরীত পাশে $\angle ACB$ উৎপন্ন হয়েছে। এই $\angle ACB$-ই হলো ADB চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণ (inscribed angle)। আবার আরও দুটি কাঠি ককশিটে চিত্রের মতো এমনভাবে বসাও যেন, এদের এক মাথা একত্রে D বিন্দুতে বৃত্তের উপর এবং অপর মাথা দুটি বৃত্তের উপর A ও B বিন্দুতে থাকে। এক্ষেত্রে ACB চাপের বিপরীত পাশে D বিন্দুতে $\angle ADB$ উৎপন্ন করে। এই $\angle ADB$-ই হলো ACB চাপের উপর আরও একটি বৃত্তস্থ কোণ (inscribed angle)। অপর কোণ দুটি অর্থাৎ $\angle CAD$ ও $\angle CBD$ কে কী কোণ বলা যায়?

একক কাজ: বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের কাঠি দিয়ে বৃত্তের কোনো একটি চাপের উপর **কটি** বৃত্তস্থ কোণ তৈরি করা যাবে? যদি একের অধিক বৃত্তস্থ কোণ তৈরি করা যায়, তাহলে কোণগুলো তৈরি করে চাঁদার সাহায্যে সেগুলো মেপে দেখো। প্রয়োজনে খাতায় ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধের কয়েকটি বৃত্ত বানিয়ে প্রতিটিরই কোনো একটি চাপের উপর একইভাবে একাধিক বৃত্তস্থ কোণ তৈরি করো ও কোণগুলো মেপে পর্যবেক্ষণ করো। তারপর শূন্যস্থানগুলো পূরণ করো:

ক) কোনো বৃত্তের উপচাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো ....।

খ) বৃত্তের অধিচাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো ....।

গ) বৃত্তের উপচাপ ও অধিচাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি ....সমকোণ।

ঘ) বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর ....।

ঙ) কোনো বৃত্তের অধিচাপে অন্তর্লিখিত কোণ ....।[স্থূলকোণ/সূক্ষ্মকোণ]

চ) কোনো বৃত্তের উপচাপে অন্তর্লিখিত কোণ ....।[স্থূলকোণ/সূক্ষ্মকোণ]

নিচের বিষয়গুলোর মধ্যকার পার্থক্য পাশের বাক্সে লেখো :

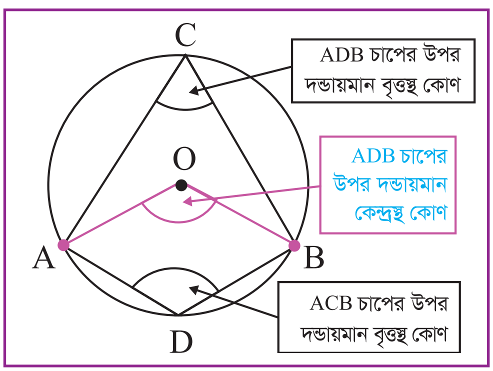
ক) উপ-বৃত্তচাপ ও উপ-বৃত্তাংশ

খ) অধি-বৃত্তচাপ ও অধি-বৃত্তাংশ

গ) বৃত্তাংশ ও বৃত্তকলা

কেন্দ্রস্থ কোণ (Central Angle)

বৃত্তস্থ কোণ তৈরির জন্য যে মডেলটি বানানো হয়েছে, চলো ঐ মডেলে আর কী কী করা যায় দেখি। এবার আরও দুটি কাঠি নাও। কাঠি দুইটি এমনভাবে ককশিটে বসাও যেন এদের এক মাথা বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দুতে কোণ উৎপন্ন করে এবং অপর মাথা দুটি বৃত্তের উপর A ও B বিন্দুতে থাকে। এক্ষেত্রে কাঠি দুটির দৈর্ঘ্য কীরূপ হবে? লক্ষ করো, কাঠি দুটি ADB চাপের উপর ∠AOB উৎপন্ন করেছে। এই ∠AOB-ই হলো ADB চাপ অর্থাৎ বৃত্তের উপচাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ **(Central Angle)**।



চাঁদার সাহায্যে মেপে দেখো এবং শূন্য স্থানগুলো পূরণ করো:

ক) ADB উপচাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ ∠AOB =................ ডিগ্রি এবং ∠AOB একটি .... [স্থূলকোণ/সূক্ষ্মকোণ] । কিন্তু এই একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণটি হলো ...., এর পরিমাণ ....ডিগ্রি এবং কোণটি ....কোণ। [স্থূলকোণ/সূক্ষ্মকোণ/প্রবৃদ্ধ কোণ]

খ) এবার ADB উপচাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ ও বৃত্তস্থ কোণ দুটি পর্যবেক্ষণ করে কী পেলে? কেন্দ্রস্থ কোণ, বৃত্তস্থ কোণের ....অথবা বৃত্তস্থ কোণ, কেন্দ্রস্থ কোণের ....।

গ) ACB অধিচাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণটি হলো ...., এর পরিমাণ .... ডিগ্রি এবং কোণটি ....কোণ [স্থূলকোণ/সূক্ষ্মকোণ/প্রবৃদ্ধকোণ]। কিন্তু এই একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণটি হলো ...., এর পরিমাণ ....ডিগ্রি এবং কোণটি ....কোণ। [স্থূলকোণ/সূক্ষ্মকোণ]

ঘ) পর্যবেক্ষণ করে দেখো ACB অধিচাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ, বৃত্তস্থ কোণের ....অথবা বৃত্তস্থ কোণ, কেন্দ্রস্থ কোণের ....।

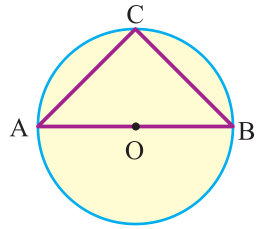
ঙ) সুতরাং আমরা বলতে পারি :

....

অর্ধবৃত্তস্থ কোণ (Angle on a semicircle)

কোনো বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ ও বৃত্তস্থ কোণ সম্পর্কে আমরা জেনেছি। আমরা আরও জেনেছি এই কোণ দুটির মধ্যকার সম্পর্কের ব্যাপারেও। এবার চলো জানার চেষ্টা করি, বৃত্তের অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এবং এই কোণের পরিমাণ কী হতে পারে?

হাতে-কলমে কাজ -১



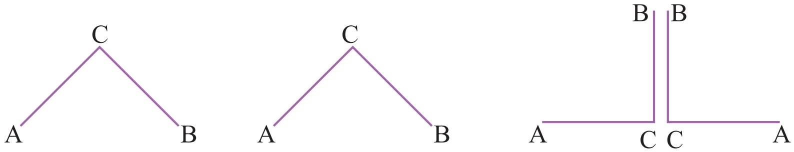
ধাপ – ১ : কম্পাস ব্যবহার করে খাতায় একটি বৃত্ত আঁকো। বৃত্তটির কেন্দ্র O দ্বারা চিহ্নিত করো।

ধাপ – ২ : O বিন্দু দিয়ে AB ব্যাস আঁকো। ব্যাস বৃত্তকে সমান .... টি বৃত্তচাপে বিভক্ত করেছে। এবার যে কোনো একটি বৃত্তচাপের উপর একটি বিন্দু C দাও।

ধাপ -৩ : A, C এবং B, C যোগ করো। ফলে ∠ACB উৎপন্ন হলো। এই ∠ACB- ই হলো অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

ধাপ – ৪ : এবার ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে দুটি ∠ACB কেটে নাও। তারপর নিচের ছবির মতো কোণ দুটিকে পাশাপাশি বসাও।

ধাপ – ৫ : কী বুঝতে পারলে? কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক এবং পরস্পর সমান তাই না?



যেহেতু $\angle ACA = 180°$, $\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

জোড়ায় কাজ : সহপাঠীর সঙ্গে আলোচনা করে নিচের কাজগুলো করো:

ক) ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধের কয়েকটি বৃত্ত আঁকো।

খ) প্রতিটি বৃত্তের যে কোনো অর্ধবৃত্তে একাধিক অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এঁকে কোণগুলো চিহ্নিত করো।

গ) প্রতিক্ষেত্রেই অর্ধবৃত্তস্থ কোণগুলো মেপে এদের ডিগ্রি পরিমাপগুলো খাতায় লেখো।

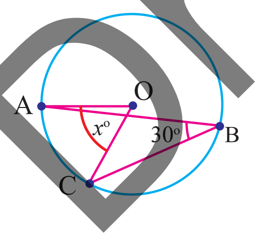
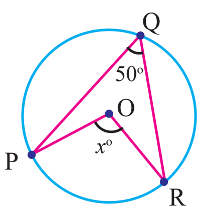
ঘ) অর্ধবৃত্তস্থ কোণের ডিগ্রি পরিমাপ পর্যবেক্ষণ করে যে সিদ্ধান্ত নেওয়া যায় তা লেখো।

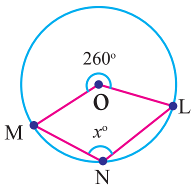
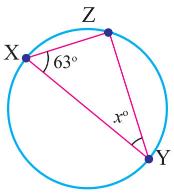
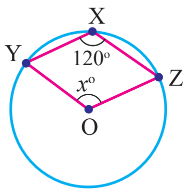
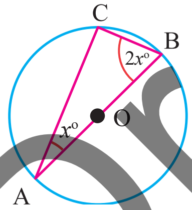
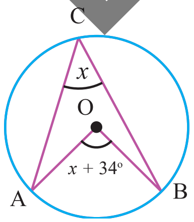
সিদ্ধান্ত :

....

একক কাজ

তোমার অভিজ্ঞতা ও পর্যবেক্ষণ অনুসারে যুক্তিসহ নিচের সমস্যাগুলো সমাধান করে x এর মান নির্ণয় করো। প্রতিক্ষেত্রেই বৃত্তের কেন্দ্র O বিবেচনা করতে হবে।

সমস্যাগুলোর চিত্ররূপ	সমাধান
 ক)	ক)
 খ)	খ)

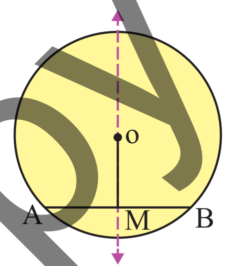
 260° O L M x° N গ)	গ)
 Z X 63° x° Y ঘ)	ঘ)
 X Y 120° Z x° O ঙ)	ঙ)
 C B 2x° O x° A চ)	চ)
 C x O x + 34° A B ছ)	ছ)

বৃত্ত ও জ্যা এর খেলা

বৃত্ত, বৃত্তের কেন্দ্র এবং নানান দৈর্ঘ্যের জ্যা পরস্পরের মধ্যে কী কী সম্পর্ক তৈরি করতে পারে, চলো হাতে কলমে কাজ করে সে সম্পর্কে জানার চেষ্টা করি।

হাতে কলমে কাজ- ২

ধাপ– ১ : পেন্সিল-কম্পাস দিয়ে কাগজে যে কোনো ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন করো। বৃত্তের কেন্দ্রটি O দ্বারা চিহ্নিত করে বৃত্তাকার ক্ষেত্রটি কেটে নাও।



ধাপ– ২ : বৃত্তাকার ক্ষেত্রটিতে ব্যাস নয় এরূপ একটি জ্যা AB আঁকো।

ধাপ– ৩ : বৃত্তাকার ক্ষেত্রটিকে এমনভাবে ভাঁজ করো যেন ভাঁজটি O বিন্দু দিয়ে যায় এবং AB সরলরেখাংশটির একটি অংশ অপরটির উপর থাকে।

ধাপ– ৪ : ভাঁজটি AB সরলরেখাংশকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার একটি নাম M দাও। O, M যোগ করো।

ধাপ– ৫ : চাঁদার সাহায্যে $\angle AMO$ ও $\angle BMO$ মেপে দেখো। কী মনে হচ্ছে? কোণ দুটির পরিমাপ কি সমান? কোণ দুটির পরিমাপ কি $90°$? অর্থাৎ $\angle AMO = \angle BMO =$ এক সমকোণ?

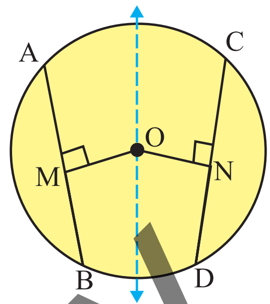
ধাপ– ৬ : সেন্টিমিটার স্কেল দিয়ে AM ও BM এর দৈর্ঘ্য মেপে দেখো। কী দেখলে? $AM = BM$, তাই না?

এবার বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একাধিক বৃত্ত এঁকে কাজটি একইভাবে কয়েকবার করো। প্রতিবারই $\angle AMO = \angle BMO =$ এক সমকোণ এবং $AM = BM$ হয়। ঠিক তো? তাহলে আমরা বলতে পারি –

> বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস নয় এরূপ জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

> **একক কাজ:** কাগজ কেটে হাতে-কলমে কাজটি করো :
>
> বৃত্তের ব্যাস নয় এরূপ কোনো জ্যা-কে যদি বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুগামী কোনো সরলরেখা সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহলে ঐ সরলরেখা ঐ জ্যা এর উপর লম্ব হবে।

হাতে কলমে কাজ- ৩



ধাপ– ১ : পেন্সিল-কম্পাস দিয়ে খাতায় যে কোনো ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন করো। বৃত্তের কেন্দ্রটি O দ্বারা চিহ্নিত করো।

ধাপ– ২ : বৃত্তে সমান দৈর্ঘ্যের দুটি জ্যা AB ও CD আঁকো।

ধাপ– ৩ : এবার কেন্দ্র O থেকে AB ও CD জ্যা-দ্বয়ের উপর যথাক্রমে OM ও ON লম্ব আঁকো। এই লম্ব দুটির মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কি না তা খুঁজে দেখতে হবে।

ধাপ– ৪ : একটি ট্রেসিং পেপারে খাতায় আঁকা চিত্রটি এঁকে বৃত্তক্ষেত্রটি কেটে নাও।

ধাপ– ৫ : বৃত্তক্ষেত্রটিকে এমনভাবে দু'ভাঁজ করো যেন A বিন্দু C বিন্দুর সঙ্গে এবং B বিন্দু D বিন্দুর সঙ্গে মিলে যায়।

ধাপ– ৬ : লক্ষ করে দেখো M বিন্দু কি N বিন্দুর উপর পড়েছে? নিশ্চয়ই পড়েছে, তাই না? এরপর ট্রেসিং পেপারের ভাঁজটি খুললে দেখতে পাবে ভাঁজটি কেন্দ্র O বিন্দু দিয়ে গেছে। তাহলে, এখান থেকে জানতে পারলে OM = ON। চাইলে স্কেল দিয়ে মেপে পরীক্ষা করে দেখতে পার।

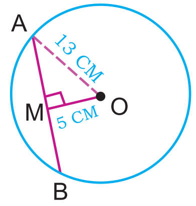
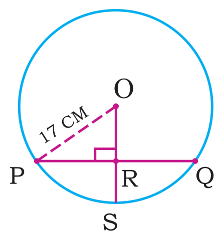
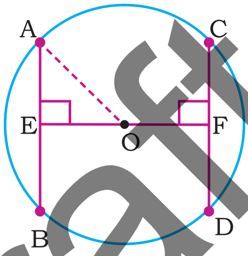
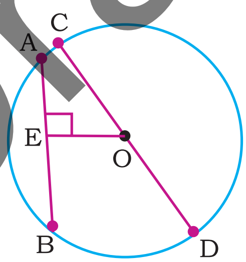
এবার বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে একাধিক বৃত্ত এঁকে কাজটি একইভাবে কয়েকবার করো। প্রতিক্ষেত্রেই OM = ON হয়, তাই না? তাহলে আমরা একটা সিদ্ধান্ত নিতে পারি–

বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী

একক কাজ: হাতে-কলমে কাজ করে জানতে পারলে, "**বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।**" কিন্তু এর বিপরীত কি সম্ভব? অর্থাৎ দুটি জ্যা বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমান দূরত্বে থাকলে, ঐ জ্যা দুটির দৈর্ঘ্য কি সমান হবে? হাতে-কলমে কাজটি করে যাচাই করো।

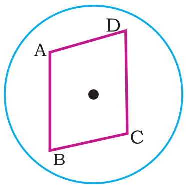
একক কাজ

তোমার অভিজ্ঞতা ও পর্যবেক্ষণ অনুসারে যুক্তিসহ নিচের সমস্যাগুলো সমাধান করো। প্রতিক্ষেত্রেই বৃত্তের কেন্দ্র O বিবেচনা করতে হবে।

সমস্যাগুলোর চিত্ররূপ	সমাধান
ক) AB জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো। 	ক)
খ) PQ = 30 cm হলে, RS= কত? 	খ)
গ) AB=CD, EF= 6 cm এবং BE = 4 cm হলে, OA = কত? 	গ)
ঘ) CD = 26 cm এবং OE = 10 cm হলে, AB = কত? 	ঘ)

বৃত্তস্থ বা বৃত্তীয় চতুর্ভুজ (Cyclic Quadrilateral)

তোমরা ইতোমধ্যেই বৃত্ত ও কাঠির খেলায় নানান মাপের বৃত্তাকার রিং এর মধ্যে ভিন্ন ভিন্ন দৈর্ঘ্যের একটি বা দুটি কাঠি আটকিয়ে অনেকগুলো মডেল তৈরি করেছ। সঙ্গে সঙ্গে নানাবিধ নতুন নতুন তথ্যও জানতে পেরেছ। এবার পেন্সিল-কম্পাস ও স্কেল ব্যবহার করে খাতায় কয়েকটি বৃত্তীয় চতুর্ভুজ আঁকো। কীভাবে আঁকবে? কয়েকটি ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধের বৃত্ত এঁকে প্রতিটির উপর A, B, C ও D বিন্দু চারটি বসিয়ে বিন্দুগুলো ক্রমানুসারে যোগ করে সহজেই চতুর্ভুজগুলো আঁকা যায়।



চিত্রের ABCD কি বৃত্তীয় চতুর্ভুজ? যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করো।

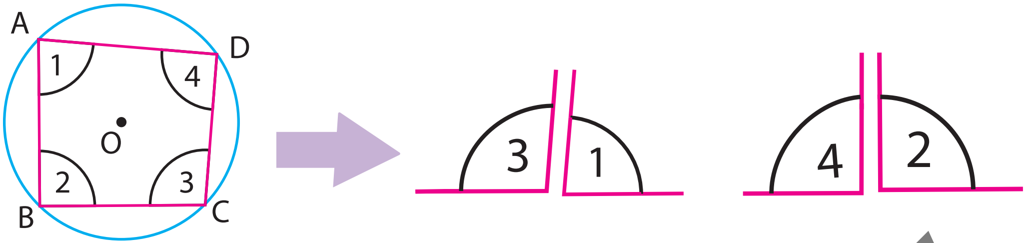
এবার খাতায় আঁকা বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোণগুলো মেপে ছক ৭.২ পূরণ করো।

ছক ৭.২

চিত্র নং	∠A	∠B	∠C	∠D	∠A + ∠C	∠B + ∠D
১.						
২.						
৩.						

ছক পর্যবেক্ষণ করে পাওয়া সিদ্ধান্ত :

হাতে কলমে কাজ- ৪



ধাপ– ১ : পেন্সিল-কম্পাস দিয়ে খাতায় যে কোনো ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন করো। বৃত্তের কেন্দ্রটি O দ্বারা চিহ্নিত করো।

ধাপ– ২ : বৃত্তের উপরে যে-কোনো চারটি বিন্দু A, B, C ও D নিয়ে A, B; B, C; C, D ও D, A যোগ করে ABCD চতুর্ভুজটি তৈরি করো।

ধাপ– ৩ : বৃত্তাকার ক্ষেত্রটিকে কেটে নাও এবং ABCD চতুর্ভুজের কোণগুলো 1, 2, 3, 4 নম্বর দিয়ে চিহ্নিত করো।

ধাপ– ৪ : কোণগুলো যত্নসহকারে কেটে আলাদা করো।

ধাপ– ৫ : এবার কোণ চারটির মধ্যে বিপরীত কোণ পাশাপাশি চিত্রের মতো বসাও।

ধাপ– ৬ : কী পেয়েছ? $\angle 1 + \angle 3 =$........... এবং $\angle 2 + \angle 4 =$...........।

একক কাজ :

হাতে-কলমে কাজটি করে যাচাই করো :

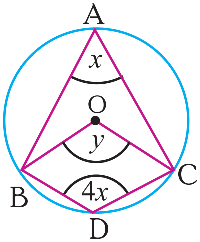
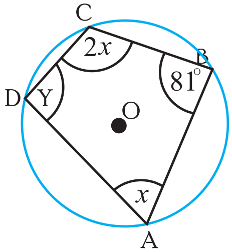
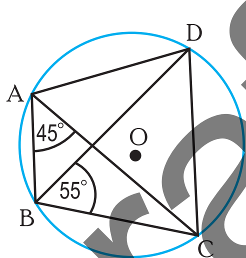
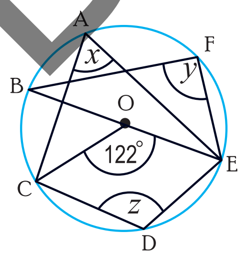
যে কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি 180° বা দুই সমকোণ হলে, চতুর্ভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলো সমবৃত্ত হবে।

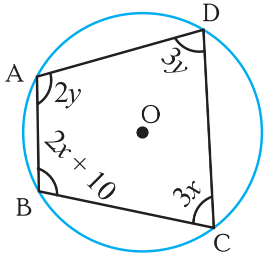
সমবৃত্ত : বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো আবদ্ধ ক্ষেত্রের শীর্ষ বিন্দুসমূহ যদি ঐ বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থান করে তবে ঐ বিন্দুসমূহকে সমবৃত্ত বলে।

- কয়েকটি সমবৃত্তীয় বহুভুজ খাতায় আঁকো এবং যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করো।

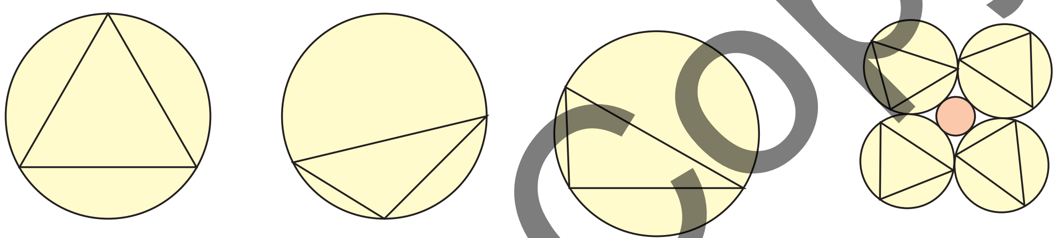
$\therefore$ হাতে-কলমে কাজটি করে যা জানতে পারলে তা নিচের খালি ঘরে লেখো:

একক কাজ : মাথা খাটিয়ে সমস্যাগুলো সমাধান করো। প্রতিক্ষেত্রেই বৃত্তের কেন্দ্র O বিবেচনা করতে হবে।

সমস্যাগুলোর চিত্ররূপ	সমাধান
ক)  x ও y এর মান নির্ণয় করো।	ক)
খ) x ও y এর মান নির্ণয় করো। 	খ)
গ)  $\angle DBC = 55°$ এবং $\angle BAC = 45°$ হলে, $\angle BCD =$ কত?	গ)
ঘ)  x, y ও z এর মান নির্ণয় করো।	ঘ)

ঙ)  x ও y এর মান নির্ণয় করো।	ঙ)

ত্রিভুজের পরিবৃত্ত (Circumcircle of a Triangle)

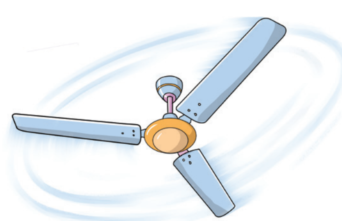


তোমরা প্রায়শই জাতীয় দিবস ও বিভিন্ন সামাজিক অনুষ্ঠানে নানাধরনের আলপনা আঁকা দেখে থাকো। লক্ষ করলে দেখবে তোমাদের ব্যবহার্য রুমাল, টেবিলের ঢাকনা, বিছানার চাদর ইত্যাদিতে অনেক রকমের নকশা আঁকা থাকে। এই নকশাগুলো মূলত বিভিন্ন ধরনের জ্যামিতিক আকৃতি। দিপা বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের ব্যাসার্ধ নিয়ে খাতায় কয়েকটি বৃত্ত আঁকে। তারপর বৃত্তগুলোর ভিতরে একটি করে ত্রিভুজ বানিয়ে উপরের চিত্রের মতো নকশা তৈরি করে, যেখানে প্রতিটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু বৃত্তের উপর আছে। তোমরা কি বলতে পারবে এভাবে আঁকা বৃত্ত ও বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজকে কী বলে?

যেহেতু বৃত্তটি বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজকে পরিবেষ্টন করে আছে, তাই বৃত্তটি ত্রিভুজটির **পরিবৃত্ত (circumcircle)**।

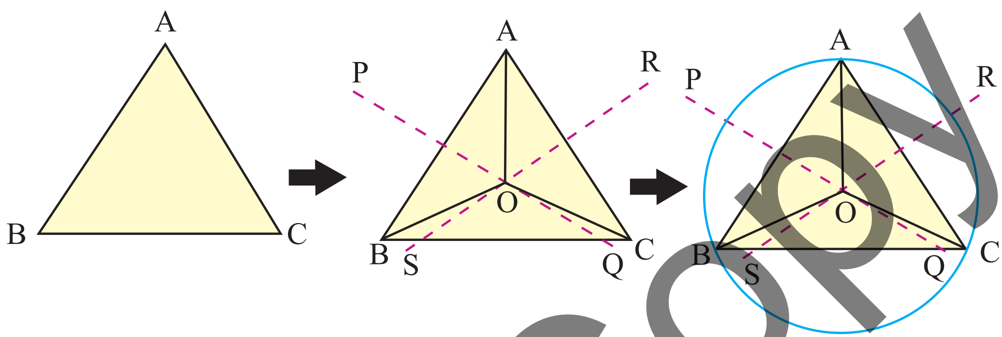
ত্রিভুজের পরিবৃত্ত সম্পর্কে বুঝতে নিচের উদাহরণটি তোমাকে আরও সাহায্য করবে।

শ্রেণিকক্ষে বা বাড়িতে তোমার মাথার উপর ছাদের সঙ্গে ঝুলানো একটি ফ্যান (পাখা) যখন ঘুরতে থাকে, তখন .... জ্যামিতিক আকৃতি তৈরি হয়। এবার তুমি কল্পনায় ফ্যানের প্রতিটি পাখার খোলা মাথার একটির সঙ্গে আরেকটি চিকন রশি বা সুতার মাধ্যমে টানটান করে বেঁধে ফেলো। এতে একটি ত্রিভুজের মতো তৈরি হলো। এখন ফ্যানটি ঘুরতে থাকলে এর বৃত্তাকৃতিটি হবে ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত।



আলোচনা থেকে তোমরা নিশ্চয়ই বুঝতে পারলে, যে কোনো বৃত্তের উপর যে কোনো তিনটি বিন্দু যোগ করে খুব সহজেই পরিবৃত্ত পাওয়া যায়। কিন্তু যে কোনো আকৃতির একটি ত্রিভুজ দেওয়া থাকলে ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্ত কীভাবে আঁকবে? সমস্যাটি সমাধান করার জন্য চলো হাতে-কলমে যে কোনো আকৃতির কোনো ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকার চেষ্টা করি :

হাতে-কলমে কাজ-৫



ধাপ– ১ : খাতায় বা সাদা কাগজে যে কোনো একটি ত্রিভুজ ABC আঁকো। তারপর খাতা থেকে আঁকা ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রটির চারপাশে একটু বেশি জায়গাসহ কেটে আলাদা করো।

ধাপ– ২ : এবার ABC ত্রিভুজের AB বাহুকে এমনভাবে ভাঁজ করো যেন A বিন্দু B বিন্দুর সঙ্গে মিলে যায়। এখন ভাঁজ খুলে ভাঁজ বরাবর দাগ টেনে PQ লম্ব সমদ্বিখণ্ডক চিহ্নিত করো।

ধাপ– ৩ : একইভাবে ভাঁজ করে AC বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক RS নির্ণয় করো।

ধাপ– ৪ : লক্ষ করো PQ ও RS লম্ব সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় একটি বিন্দুতে ছেদ করেছে। ছেদ বিন্দুটিকে O দ্বারা চিহ্নিত করো। স্কেল দিয়ে মেপে দেখো O বিন্দু থেকে A, B ও C বিন্দু তিনটির দূরত্ব সমান হবে। অর্থাৎ OA = OB = OC।

ধাপ– ৫: এবার O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA বা OB বা OC এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করো। কী দেখলে? বৃত্তটি ΔABC এর A, B ও C শীর্ষবিন্দু দিয়ে গেল। তাই না?

ভেবে বলো তো O বিন্দুকে আমরা কী বলতে পারি?

O বিন্দুকে ΔABC এর পরিকেন্দ্র (Circumcenter) বলতে পারি। আর O বিন্দুকে কেন্দ্র করে যে বৃত্তটি পেয়েছ, সেটি হলো ΔABC এর পরিবৃত্ত (Circumcircle) এবং OA বা OB বা OC হলো ΔABC এর পরিব্যাসার্ধ (Circumradius)।

একক কাজ

ক) স্থূলকোণী ও সমকোণী ত্রিভুজ এঁকে হাতে-কলমে ত্রিভুজ দুটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করো।

খ) সূক্ষ্মকোণী, স্থূলকোণী ও সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রগুলোর কোথায় অবস্থান করবে চিত্র এঁকে নিচের ছকে উল্লেখ করো।

	সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ	স্থূলকোণী ত্রিভুজ	সমকোণী ত্রিভুজ
পরিবৃত্ত			
পরিকেন্দ্রের অবস্থান	ত্রিভুজের অভ্যন্তরে		

গ) একটি ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 9 সেমি, 12 সেমি এবং 15 সেমি।
(i) ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো। (ii) ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত (Incircle of a Triangle)

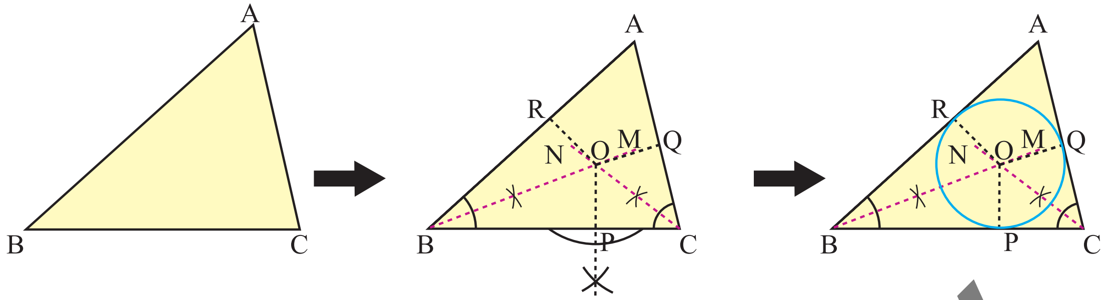
অহনা তার খাতায় একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করে। সে ত্রিভুজক্ষেত্রটিতে এমন একটি বিন্দু চিহ্নিত করতে চায়, যেখান থেকে ত্রিভুজের বাহুগুলোর দূরত্ব সর্বদাই সমান থাকে।

কাজ– ১

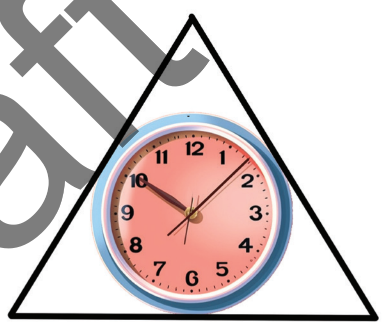
প্রথমে সে ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে কেটে নেয়। ত্রিভুজক্ষেত্রটির প্রতিটি বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করে। অহনার আঁকা লম্বসমদ্বিখণ্ডকগুলো একটি বিন্দুতে মিলিত হলো। এবার প্রাপ্ত বিন্দু থেকে ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর দূরত্ব স্কেলের মাধ্যমে মেপে দেখে দূরত্বগুলো সমান নয়। তাই সে বিকল্প চিন্তা করে এবং সে অনুযায়ী নিচের কাজটি করে।

কাজ– ২

- অহনা তার খাতায় আরও একটি ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করে ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে কেটে নেয়।
- এবার $\angle ABC$ এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক হাতে-কলমে পাওয়ার জন্য $\angle ABC$ এর শীর্ষবিন্দু বরাবর $\angle ABC$ কে এমনভাবে ভাঁজ করল যাতে AB বাহু BC বাহুর উপর মিশে যায়।



- কাগজের ভাঁজটি খুলে ভাঁজ বরাবর দাগ টেনে ∠ABC এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক BM আঁকে।
- একইভাবে কাগজ ভাঁজ করে সে ∠ACB এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক CN নির্ণয় করে। দেখা গেল, ΔABC এর ∠ABC ও ∠ACB এর অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর একটি বিন্দুতে ছেদ করেছে। ছেদ বিন্দুটিকে O দ্বারা চিহ্নিত করে।
- O বিন্দু থেকে BC, AC এবং AB বাহুর উপর OP, OQ ও OR লম্ব অঙ্কন করে। স্কেল দিয়ে মেপে দেখে OP = OQ = OR
- অহনা এবার O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OP এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকে। দেখা যায় বৃত্তটি Q ও R বিন্দু দিয়েও গেল। অর্থাৎ সে এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করে যা ত্রিভুজটির তিনটি বাহুকেই স্পর্শ করে।



চিত্রটি আঁকতে পেরে অহনা খুবই খুশি। কারণ তার পড়ার ঘরের দেয়ালঘড়িটি অনেকটা তারই আঁকা চিত্রের মতো। তোমরা ভেবে বলো তো অহনার আঁকা বৃত্তটিকে কী বলা যায়? যেহেতু বৃত্তটি ত্রিভুজের ভিতরে অবস্থিত এবং যা ত্রিভুজের তিনটি বাহুকেই স্পর্শ করেছে, সেহেতু বৃত্তটিকে আমরা ত্রিভুজের **অন্তর্বৃত্ত (incircle)** বলতে পারি। আর অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্রকে **অন্তঃকেন্দ্র (incentre)** এবং ব্যাসার্ধকে **অন্তঃব্যাসার্ধ (inradius)** বলা হয়।

একক কাজ :

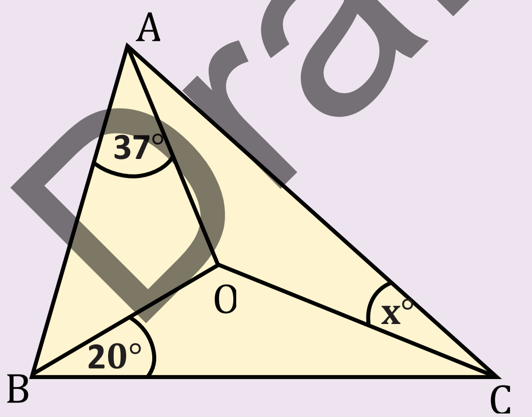
ক) স্থূলকোণী ও সমকোণী ত্রিভুজ এঁকে হাতে-কলমে ত্রিভুজ দুটির অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করো।

খ) সূক্ষ্মকোণী, স্থূলকোণী ও সমকোণী ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রগুলো কোথায় অবস্থান করবে চিত্র এঁকে নিচের ছকে উল্লেখ করো।

	সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ	স্থূলকোণী ত্রিভুজ	সমকোণী ত্রিভুজ
অন্তর্বৃত্ত			
অন্তঃকেন্দ্রের অবস্থান			ত্রিভুজের অভ্যন্তরে

গ) একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও অন্তঃকেন্দ্র কোথায় হবে হাতে-কলমে অঙ্কন করে যাচাই করো।

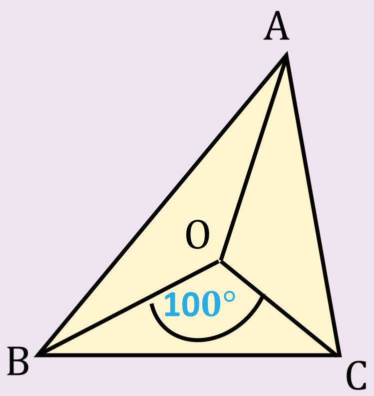
ঘ)



O বিন্দু ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র হলে, x এর মান নির্ণয় করো।

ঘ)

ঙ)



O বিন্দু ΔABC এর অন্তঃকেন্দ্র এবং $\angle BOC = 100°$ হলে, $\angle BAC$ এর মান নির্ণয় করো।

ঙ)

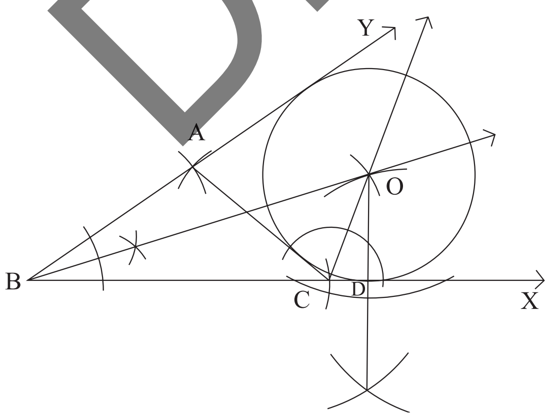
ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত (Excircle of a triangle)

আমরা ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করা জানলাম যাদের একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু দিয়ে যায় এবং আরেকটি ত্রিভুজের ভিতরে থাকে কিন্তু তিনটি বাহুকেই স্পর্শ করে। ভেবে দেখো তো এমন কোনো বৃত্ত কি আঁকা যাবে যা ত্রিভুজের বাইরে থাকবে অথচ ত্রিভুজের তিনটি বাহুকেই স্পর্শ করবে? অর্থাৎ বৃত্তটি ত্রিভুজের একটি বাহুকে এবং অপর দুই বাহুর বর্ধিতাংশদ্বয়কে স্পর্শ করবে।

চলো বৃত্তটি আঁকার চেষ্টা করি :

প্রথমেই যে কোনো একটি ত্রিভুজ ABC আঁকো। ΔABC এর BC এবং BA বাহুদ্বয়কে X ও Y পর্যন্ত বর্ধিত করো।

তোমরা ইতোমধ্যেই জেনেছ কোণকে কীভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করতে হয়, তাই না ?



এবার $\angle ABC$ ও $\angle ACX$ কোণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করো। লক্ষ করে দেখো সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় একটি বিন্দুতে ছেদ করেছে। ছেদ বিন্দুটিকে O দ্বারা চিহ্নিত করো।

এখন O বিন্দু থেকে AC এর উপর বা BC বা BA বাহুর বর্ধিতাংশের উপর লম্ব অঙ্কন করো। O বিন্দু থেকে আঁকা লম্ব তিনটির দৈর্ঘ্য সমান হয়েছে কি না স্কেল দিয়ে মেপে দেখতে পার। O বিন্দু থেকে BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর আঁকা লম্বটি হলো OD। এখন

O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকো। বৃত্তটি ΔABC এর AC বাহুকে এবং BC ও BA বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করেছে।

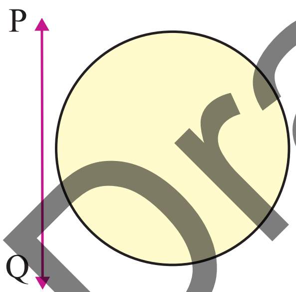
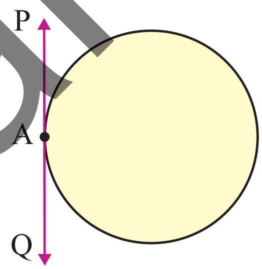
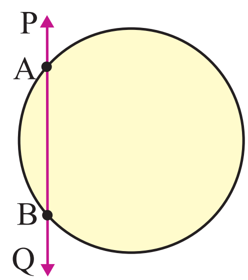
এই ধরনের বৃত্তকে কী বলা হয়?

বৃত্তটি ত্রিভুজের বাইরে অবস্থিত হলেও এটি ত্রিভুজের একটি বাহুকে এবং অপর দুই বাহুর বর্ধিতাংশদ্বয়কে স্পর্শ করে আছে। তাই এই ধরনের বৃত্তকে আমরা ত্রিভুজের **বহির্বৃত্ত (excircle)** বলতে পারি। বৃত্তটির কেন্দ্রকে **বহিঃকেন্দ্র (excentre)** এবং ব্যাসার্ধকে **বহিঃব্যাসার্ধ (exradius)** বলে থাকি।

এবার ভেবে বলো তো একটি ত্রিভুজের কয়টি বহির্বৃত্ত অঙ্কন করা যাবে?

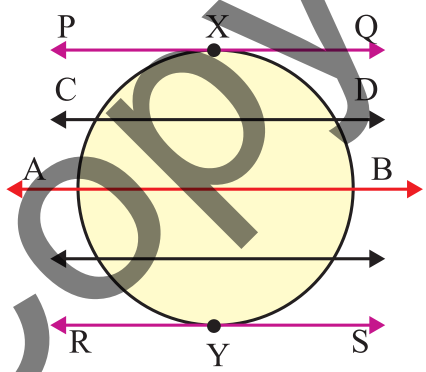
বৃত্তের ছেদক ও স্পর্শক (Secant and Tangent of a Circle)

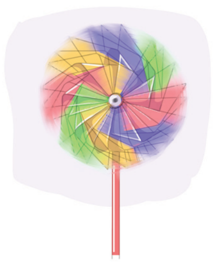
সমতলে একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার পারস্পরিক অবস্থান চিন্তা করো। বৃত্ত ও সরলরেখাটি কী কী অবস্থানে থাকতে পারে ৭.৩ ছকের ছবিগুলো পর্যবেক্ষণ করো :

ছক ৭.৩		
		
ক) সরলরেখা বৃত্তটিকে স্পর্শ করে নাই।	ক) সরলরেখা বৃত্তটিকে A বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।	ক) সরলরেখা বৃত্তটিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে।
খ) সরলরেখা ও বৃত্তটির মধ্যে কোনো সাধারণ বিন্দু নেই।	খ) সরলরেখা ও বৃত্তটির মধ্যে একটি সাধারণ বিন্দু আছে।	খ) সরলরেখা ও বৃত্তটির মধ্যে দুইটি সাধারণ বিন্দু আছে।

গ) বৃত্ত ও সরলরেখা দুইটি আলাদা জ্যামিতিক আকৃতি। এখানে এদের মধ্যে কোনো সম্পর্ক নেই।	গ) সরলরেখাটি বৃত্তের একটি **স্পর্শক (tangent)** এবং A **স্পর্শ বিন্দু (qoint of contact)**। স্পর্শক বৃত্তকে কেবল একটি বিন্দুতেই স্পর্শ করে।	গ) সরলরেখাটি বৃত্তের একটি **ছেদক (secant)** এবং ছেদক একটি বৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।

তুমি চাইলে হাতে-কলমেও বৃত্তের স্পর্শক তৈরি করতে পার। এর জন্য খাতায় প্রথমে যে কোনো ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকতে হবে। তারপর বৃত্তাকার ক্ষেত্রটিকে কেটে নাও। এবার বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির উপর একটি স্কেল রেখে স্কেলের দুইপাশ দিয়ে দুইটি সরলরেখা AB ও CD আঁকো। তাহলে CD ছেদক AB ছেদকের সমান্তরাল হবে। এখন AB ছেদকের সমান্তরাল একাধিক ছেদক স্কেলের সাহায্যে এঁকে PQ এবং RS আঁকো, যারা বৃত্তক্ষেত্রটিকে যথাক্রমে X ও Y এই দুটি বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। এক্ষেত্রে PQ এবং RS উভয়ই বৃত্তটির দুইটি স্পর্শক হবে।





বৃত্তাকার রিং বা পুরাতন সিডি ব্যবহার করে ছবির মতো খেলনা তৈরি করতে পার। খেলনার হাতলটিকে কী বলবে?

আমাদের দৈনন্দিন জীবনে কোথায় স্পর্শক দেখতে পাই

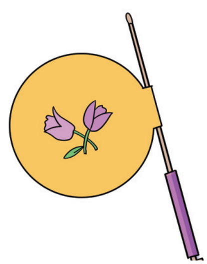
১. পাশের ছবিতে যে উপকরণটি দেখা যাচ্ছে, তার নাম কি বলতে পারবে? যারা জানো না তাদের জন্য দু-একটি সংকেত দেওয়া যেতে পারে।

(i) গরমের দিনে কোনো কারণে বিদ্যুৎ না থাকলে তুমি হাত দিয়ে ঘুরিয়ে বাতাস করো।

(ii) এর হাতলটি ধরে ডানে-বামে ঘুরিয়ে বাতাস তৈরি করা হয়।

(iii) দোকান বা মেলা থেকে কিনে বা নিজেরাও তৈরি করে ব্যবহার করতে পার।

বাহ! ঠিকই বলেছ। এটি একটি হাত পাখা। পাখার গোলাকার অংশকে এবং হাতলকে কী বলা বলা যেতে পারে?



যেহেতু হাতলটি বৃত্তাকার চাকটির বাইরের দিকে বৃত্তাকার ক্ষেত্রটিকে স্পর্শ করে আটকানো থাকে। তাই হাতলটিকে স্পর্শক বলা যেতে পারে।

২. তুমি যখন রাস্তা দিয়ে সাইকেল চালাও তখন সাইকেলের চাকা রাস্তার উপর ঘুরতে থাকে। আর রাস্তাটি হবে চাকার সাপেক্ষে একটি স্পর্শক। আবার রাস্তাটি একই সঙ্গে সাইকেলের দুটি চাকাকেই স্পর্শ করে বিধায় স্পর্শকটিকে বা রাস্তাটিকে **সাধারণ স্পর্শক (Common Tangent)** বলতে পারি। চাকা দুইটির কেন্দ্র রাস্তার একই পাশে থাকে বলে রাস্তাটিকে **সরল সাধারণ স্পর্শক** বলা যেতে পারে।

জোড়ায় কাজ

দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র যদি সাধারণ স্পর্শকের বিপরীত পাশে থাকে তবে ঐ সাধারণ স্পর্শককে আমরা কী বলতে পারি?

সহপাঠীর সঙ্গে আলাপ আলোচনা করে যুক্তিসহ নিজেদের খাতায় লেখো।

স্পর্শকের বৈশিষ্ট্য (Properties of Tangent)

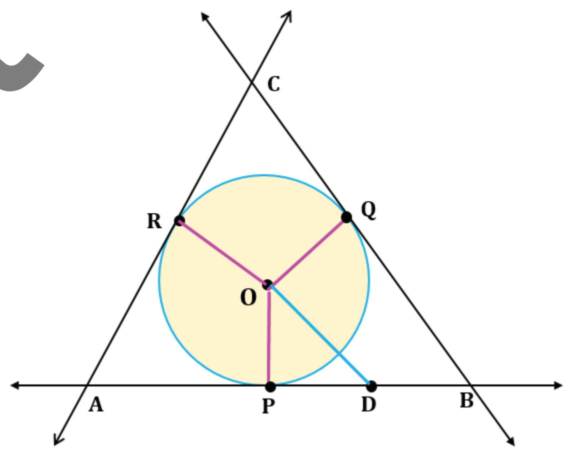
আমরাতো ইতোমধ্যেই জেনেছি, বৃত্তের স্পর্শক বৃত্তকে কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে। এবার চলো স্পর্শকের আরও কী কী বৈশিষ্ট্য আছে তা হাতে-কলমে কাজ করে খুঁজে দেখি :

হাতে-কলমে কাজ– ৬

ধাপ– ১ : খাতায় যে কোনো পৃষ্ঠার চারভাগের একভাগ কেটে নাও। টুকরা কাগজটিতে যে কোনো ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকো।

ধাপ– ২ : এবার বৃত্তস্থ যে কোনো তিনটি বিন্দু P, Q ও R নাও।

ধাপ– ৩ : কাগজ ভাঁজ করে পাশের ছবির মতো P, Q ও R বিন্দুতে তিনটি স্পর্শক যথাক্রমে AB, BC ও CA অঙ্কন করো।



ধাপ– ৪ : O, P; O, Q এবং O, R যোগ করো। এতে বৃত্তটির কী পেলে?

ধাপ– ৫ : এবার AB এর উপর P ব্যতীত অন্য যে কোনো বিন্দু D নাও। O, D যোগ করো। স্কেল দিয়ে OD ও OP এর দৈর্ঘ্য মেপে দেখো। কী পেলে? OD> OP তাই না?

তাহলে দেখা যাচ্ছে, AB স্পর্শকের উপর যে কোনো বিন্দু ও কেন্দ্রে সংযোজক সরলরেখার মধ্যে OP-ই ক্ষুদ্রতম। চাঁদা ব্যবহার করে $\angle OPB$ ও $\angle OPA$ মেপে দেখো। কী পেয়েছ? $\angle OPB = \angle OPA = 90°$। একইভাবে BC ও CA স্পর্শকের ক্ষেত্রেও $\angle OQB$ ও $\angle OQC$ এবং $\angle ORC$ ও $\angle ORA$ কোণগুলো মেপে দেখো।

সুতরাং, তুমি এবার সিদ্ধান্ত নিতে পার, $OP \perp AB$

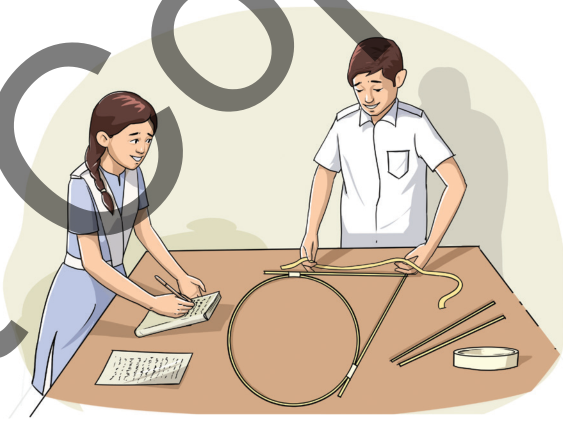
অর্থাৎ, বৃত্তের কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

হাতে-কলমে কাজ – ৭

স্পর্শকের আরও একটি বৈশিষ্ট্য হলো : বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে দুটি স্পর্শক টানলে ঐ বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান।

চলো হাতে-কলমে যাচাই করে দেখি :

যাচাই প্রক্রিয়াটি পরিচালনার জন্য লাগবে একটি বৃত্তাকার রিং, কয়েকটি চিকন সোজা কাঠি, টেপ ও একটি লম্বা স্কেল।



ধাপ – ১ : টেবিলের উপর রিংটি রেখে দুইটি কাঠি রিং এর দুই পাশে চিত্রের মতো টেপ দিয়ে আটকে দাও।

ধাপ – ২ : এখন কাঠির খোলা মাথা দুইটি একত্র করে বেঁধে দাও। এতে বৃত্তাকার রিং এর সঙ্গে বাঁধা অবস্থায় কাঠি দুটি রিং এর বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে দুটি স্পর্শক মনে হচ্ছে তাই না?

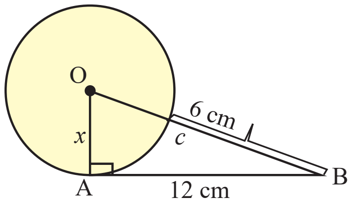
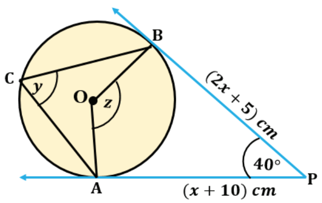
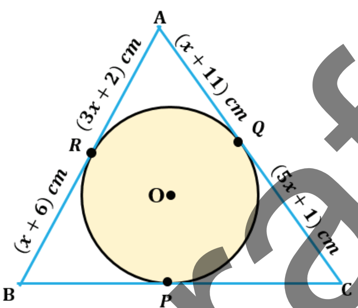
ধাপ – ৩ : কাঠি দুইটির একত্রে বাঁধা স্থান থেকে বৃত্তাকার রিং-এ স্পর্শ করা স্থান পর্যন্ত দূরত্ব মেপে দেখো।

কী পেয়েছ? দূরত্ব দুটি কি সমান?

ছোটো বা বড়ো ব্যাসার্ধের আরও দু-তিনটি বৃত্তাকার চুড়ি ও বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের কাঠি নিয়ে কাজটি কয়েকবার করো। সকল ক্ষেত্রেই একই ফলাফল পেলে এবার সিদ্ধান্ত নিতে পার যে, **বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে দুটি স্পর্শক টানলে ঐ বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সকল ক্ষেত্রেই সমান হবে।**

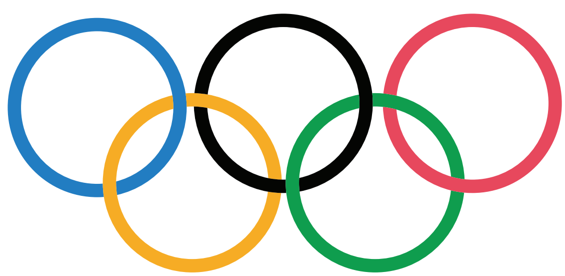
একক কাজ

তোমার অভিজ্ঞতা ও পর্যবেক্ষণ অনুসারে যুক্তিসহ নিচের সমস্যাগুলো সমাধান করো। প্রতিক্ষেত্রেই বৃত্তের কেন্দ্র O বিবেচনা করতে হবে।

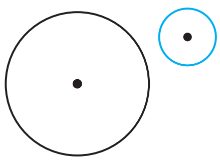
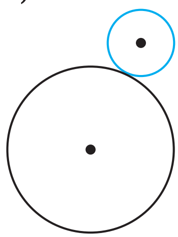
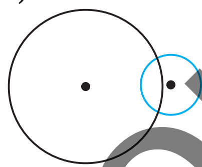
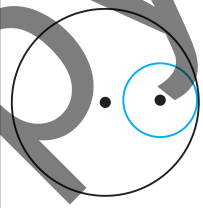
ছক ৭.৪	
সমস্যাগুলোর চিত্ররূপ	**সমাধান**
ক)  x এর মান নির্ণয় করো।	ক)
খ)  x, y, z এর মান নির্ণয় করো।	খ)
গ)  BC এর দের্ঘ্য নির্ণয় করো।	গ)

একাধিক বৃত্ত ও কাঠির খেলা

পাশের ছবিটি অতি পরিচিত একটি লোগো। তোমরা কি বলতে পারবে লোগোটি দ্বারা আমরা কী বুঝতে পারি? পেন্সিল-কম্পাস ব্যবহার করে একাধিক বৃত্তকে এভাবে শৃঙ্খলিত করা যাবে কি? সহপাঠীর সঙ্গে আলাপ আলোচনা করে খাতায় আঁকার চেষ্টা করো।

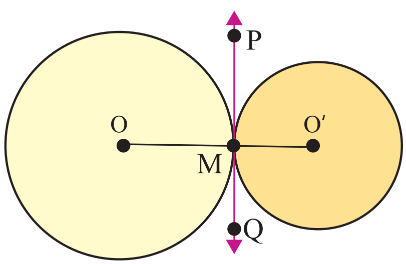


ধরো, তোমাকে ভিন্ন ব্যাসার্ধের দুইটি বৃত্তাকার রিং বা চুড়ি দেওয়া হলো। রিং বা চুড়ি দুটিকে খাতার উপর রেখে বৃত্ত আঁকতে হবে। শর্ত হলো বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে থাকবে। অর্থাৎ তাদের একটি সাধারণ স্পর্শবিন্দু থাকবে। অহনা খুশি হয়ে খুব দ্রুত চুড়ি দুটি দ্বারা ছক ৭.৫ ছবির মতো কয়েক জোড়া বৃত্ত এঁকে ফেলল। নিবিড়ভাবে অহনার আঁকা ছবিগুলো পর্যবেক্ষণ করো। কোন কোন ছবিতে বৃত্ত দুইটির একটি সাধারণ স্পর্শবিন্দু আছে? সঠিক চিত্রটিতে (√) ও ভুল চিত্রটিতে (×) চিহ্ন দাও। তোমার উত্তরের সপক্ষে অবশ্যই লিখিত যুক্তি থাকতে হবে।

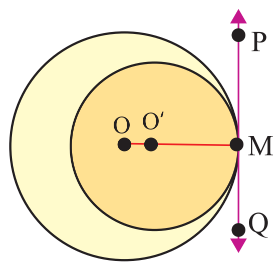
ছক ৭.৫				
চিত্র	ক) 	খ) 	গ) 	ঘ) 
সঠিক / ভুল				
সপক্ষে যুক্তি				

এবার পাশের চিত্র দুটি লক্ষ করো:

চিত্র- ক ও চিত্র- খ উভয়ের স্পর্শবিন্দু একই। তাছাড়া স্পর্শবিন্দু ও উভয়ের কেন্দ্রদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত। মাথা খাটিয়ে বলো চিত্র- ক-এ বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের .... সমান এবং চিত্র- খ-এ বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের .... সমান। আর



চিত্র- ক



চিত্র- খ

তোমরাতো ইতোমধ্যেই জেনেছ সাধারণ স্পর্শক সম্পর্কে। এবার তোমাদের বলতে হবে চিত্র দুটির কোনটিতে কোন ধরনের সাধারণ স্পর্শক রয়েছে। অবশ্যই তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দিতে হবে।

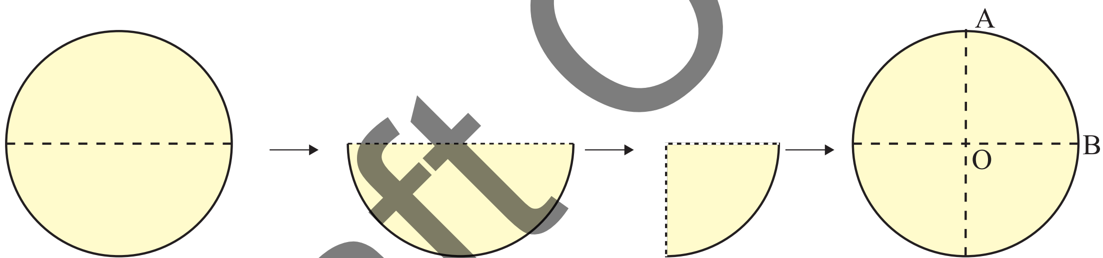
একক কাজ

তোমার কাছে ভিন্ন ব্যাসার্ধের কয়েকটি বৃত্তাকার রিং বা চুড়ি এবং বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের অনেকগুলো কাঠি আছে। বৃত্তাকার রিং বা চুড়ি ব্যবহার করে তিনটি মডেল এমনভাবে তৈরি করো যেন চুড়ি দুটি প্রথমটিতে পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে, দ্বিতীয়টিতে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে এবং তৃতীয়টিতে স্পর্শ না করে। প্রয়োজনে মাস্কিং টেপ দ্বারা চুড়ি দুটি বেঁধে রাখতে পারবে। এবার মডেলগুলোতে বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের কাঠি ব্যবহার করে উভয় প্রকারের সাধারণ স্পর্শক গঠন করো। সাধারণ স্পর্শকসংবলিত মডেলটি তৈরি করে শিক্ষককে দেখাও এবং ব্যাখ্যা করো।

বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য, বৃত্তাংশ ও বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল পরিমাপ

মনে আছে, তোমার পড়ার ঘরের কোণায় একটি শেলফ বানাতে চেয়েছিলে? তোমার শেলফটি কিন্তু একটি নিয়মিত জ্যামিতিক আকৃতি নয়। অর্থাৎ সেলফটির সকল অঙ্গ সমান নয়। এর কোনো কোনো জায়গায় বৃত্তাকৃতির কাঠ লাগবে, আবার কোনো কোনো স্থানে বৃত্তাংশ ও বৃত্তকলার মতো কাঠের প্রয়োজন হবে। সেজন্য তোমাকে এই বিষয়গুলো সম্পর্কে ধারণা অর্জন করতে হবে। তাহলে চলো আমরা এখন বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য, কীভাবে নির্ণয় করা হয় সে সম্পর্কে জানার চেষ্টা করি।

বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয়



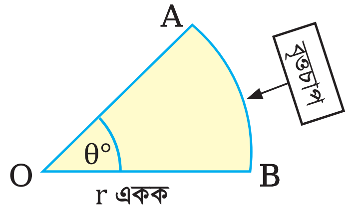
তোমরা পূর্বের শ্রেণিতে জেনেছ, r একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কোনো একটি বৃত্তের পরিধি $2\pi r$ একক এবং ক্ষেত্রফল πr^2 বর্গ একক। তোমাদের জানা এই অভিজ্ঞতাগুলো কাজে লাগিয়ে r একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবে।

একটি বৃত্তাকার কাগজকে সমান চার ভাঁজ করে খুলে ফেললে চারটি সমান বৃত্তকলা তৈরি হয়, তাই না?

তুমি তো জানো বৃত্ত কেন্দ্রে $360°$ কোণ উৎপন্ন করে। যেহেতু বৃত্তাকার কাগজটিকে সমান চার ভাঁজে ভাঁজ করেছ, সেহেতু AOB বৃত্তকলাটি কেন্দ্রে $90°$ কোণ তৈরি করবে। আর এক্ষেত্রে AB বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য হবে $\frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$ একক। কিন্তু বৃত্তাকার কাগজটিকে যদি সমানভাবে ভাঁজ না করে যে কোনোভাবে ভাঁজ করা হয় তবে বৃত্তচাপটি কেন্দ্রে কত ডিগ্রি কোণ তৈরি করবে তুমি না মেপে বলতে পারবে না। ধরো, বৃত্তচাপটি কেন্দ্রে $\theta°$ কোণ উৎপন্ন করে। সেক্ষেত্রে চলো আমরা ঐ বৃত্তের বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য কীভাবে নির্ণয় করতে হয় তা জানতে চেষ্টা করি।

তাছাড়া তুমি ইতোমধ্যেই জেনেছ, বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য ও কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ সরল অনুপাতী।

তাহলে আমরা বলতে পারি, $\dfrac{\text{বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য}}{\text{বৃত্তের পরিধি}} = \dfrac{\theta}{360}$



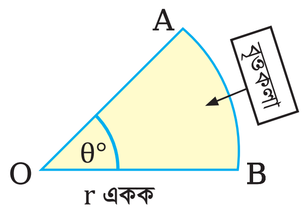
$\therefore$ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{\theta}{360} \times$ বৃত্তের পরিধি $= \dfrac{\theta}{360} \times 2\pi r$ একক

বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয়

বৃত্তাকার কাগজটিকে যখন সমান চার ভাঁজে ভাঁজ করেছ, তখন AOB বৃত্তকলাটি কেন্দ্রে $90°$ কোণ তৈরি করেছে। আর সেক্ষেত্রে AOB বৃত্তকলাটির ক্ষেত্রফল হবে $\frac{1}{4} \times \pi r^2$ বর্গ একক। কিন্তু বৃত্তাকার কাগজটিকে যদি সমানভাবে ভাঁজ না করে যে কোনোভাবে ভাঁজ করা হয় তবে বৃত্তকলাটি কেন্দ্রে কত ডিগ্রি কোণ তৈরি করবে সেটিও তুমি না মেপে বলতে পারবে না। ধরে নাও, বৃত্তকলাটি কেন্দ্রে $\theta°$ কোণ উৎপন্ন করেছে। সেক্ষেত্রে ঐ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল কীভাবে নির্ণয় করতে হবে চলো তা জানতে চেষ্টা করি।

আমরা জানি, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল ও কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ সরল অনুপাতী।

সুতরাং, $\dfrac{\text{বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তের ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{\theta}{360}$



$\therefore$ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \dfrac{\theta}{360} \times$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2$ বর্গ একক

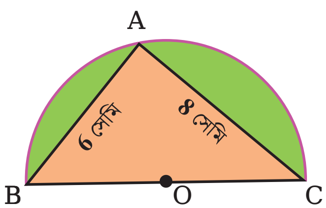
সমস্যা	সমাধান
১। একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাসার্ধ 12 সেমি হলে, চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।	১। দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 12$ সেমি, এবং বৃত্তচাপ দ্বারা কেন্দ্রে কোণ $\theta = 30°$ $\therefore$ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{\theta}{360} \times 2\pi r$ একক। $= \dfrac{30}{360} \times 2 \times 3.1416 \times 12$ সেমি $= 6.28$ সেমি (প্রায়)।

২। একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাসার্ধ 8 সেমি হলে, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।	১। দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 8$ সেমি, এবং বৃত্তচাপ দ্বারা কেন্দ্রে কোণ $\theta = 60°$ $\therefore$ বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ বর্গ একক। $= \frac{30}{360} \times 3.1416 \times 6^2$ বর্গ সেমি $= 18.85$ বর্গ সেমি (প্রায়)।

একক কাজ :

<table>
<tr><th>সমস্যা</th><th>সমাধান</th></tr>
<tr><td>

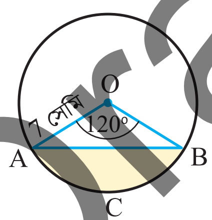
১।



ABC অর্ধবৃত্ত হলে, চিত্রের সবুজ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

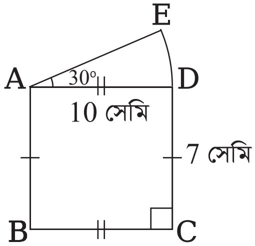
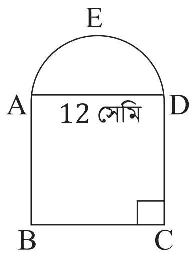
</td><td></td></tr>
<tr><td>

২।

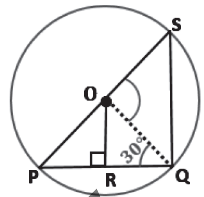


O বৃত্তের কেন্দ্র। ACB বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

</td><td></td></tr>
</table>

৩।  চিত্রে ABCD একটি আয়ত। DAE একটি বৃত্তাংশ। $\angle DAE = 30°$। সম্পূর্ণ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।	
৪।  চিত্রে ABCD একটি বর্গ। DAE একটি অর্ধবৃত্ত। সম্পূর্ণ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।	

অনুশীলনী



১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে জ্যা $PQ = x$ cm এবং $OR \perp PQ$।

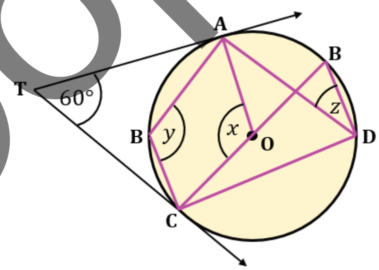
ক) $\angle QOS$ এর পরিমাণ কত?

খ) $OR = \left(\frac{x}{2} - 2\right)$cm হলে, x এর মান নির্ণয় করো।

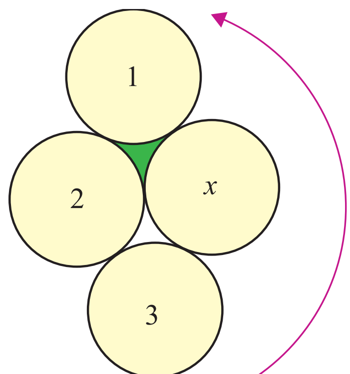
২। 10 cm ও 24cm দৈর্ঘ্যের PQ ও RS সমান্তরাল জ্যা দুইটি O কেন্দ্রীয় বৃত্তের কেন্দ্রের বিপরীত পাশে অবস্থিত। যদি PQ ও RS জ্যা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 17cm হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

৩। ধরো, তোমাদের একটি ত্রিভুজাকৃতি জমি আছে। জমিটির পরিসীমা 124 মিটার। ঐ জমির সবচেয়ে বেশি জায়গা জুড়ে সবজি চাষ করতে চাও। যদি সবজি চাষের জায়গার পরিধি 84 মিটার হয়, তবে জমিটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

৪। চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং TA ও TC দুইটি স্পর্শক। $\angle ATC = 60°$ হলে, x, y ও z এর মান নির্ণয় করো।



৫। একই আকারের (একই রকমের) কয়েকটি এক (১) টাকার কয়েন সংগ্রহ করো। কয়েনগুলোর যে কোনো একটিকে তোমার খাতার মাঝখানে রাখো। এবার এর চারপাশে পরস্পরকে স্পর্শ করে চিত্রের মতো কয়েনগুলো বসাও। অনেকটা ক্যারম বোর্ডে গুটি সাজানোর মতো।



ক) উপরের শর্ত মেনে 'x' চিহ্নিত কয়েনকে স্পর্শ করে চারপাশে সর্বোচ্চ কটি কয়েন বসানো যাবে? চিত্রটি সম্পূর্ণ করে তা নির্ণয় করো।

খ) চিত্রের '1', '2' ও 'x' চিহ্নিত বৃত্ত তিনটির কেন্দ্রগুলো যোগ করো। যে ত্রিভুজটি পেলে তার পরিসীমা 18 সেমি। চিত্রের সবুজ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

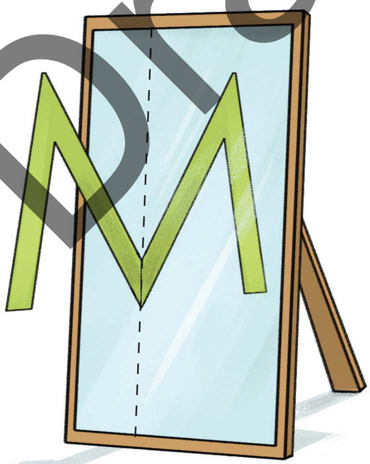
গ) খাতায় চিত্রের যে কোনো একটি কয়েন ছাপ দিয়ে বৃত্ত বানাও। তারপর বৃত্তটির কেন্দ্র নির্ণয় করো।

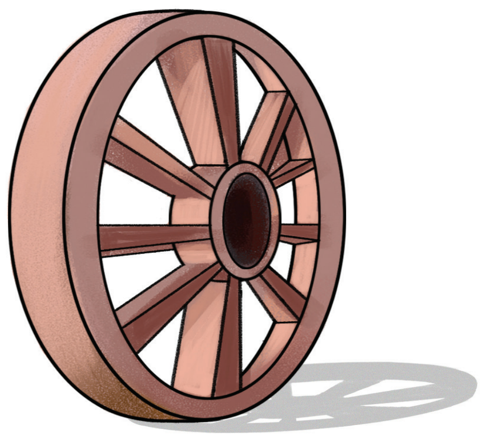
ঘ) যে কোনো একটি কয়েনের ব্যাসার্ধের গুণিতক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত আঁকো। বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে প্রমাণ করো যে, বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব তাদের সাধারণ ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ।

পরিমাপে প্রতিসমতার প্রয়োগ

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে

- প্রতিসম বস্তু ও প্রতিসমতা
- প্রতিসাম্য রেখা
- প্রতিসমতা পরীক্ষা
- ঘূর্ণন প্রতিসমতা
- ঘূর্ণন প্রতিসমতার বৈশিষ্ট্য





পরিমাপে প্রতিসমতার প্রয়োগ

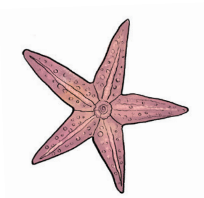
এমন যদি হতো যে আমরা কোনো একটি বস্তুর একটি অংশ মেপে সম্পূর্ণ বস্তুটিকে পরিমাপ করতে পারতাম তাহলে কেমন হতো বলো তো? আমাদের চারপাশের পরিচিত পরিবেশ থেকে এই ধরনের বস্তুকে আমরা কীভাবে শনাক্ত করতে পারি? নিচের ছবিগুলো নিবিড়ভাবে পর্যবেক্ষণ করো।

(ক)

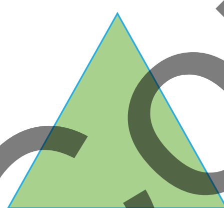
(খ)

(গ)

(ঘ)



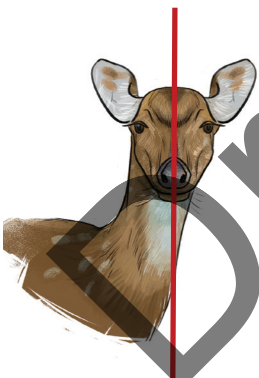
(ঙ)



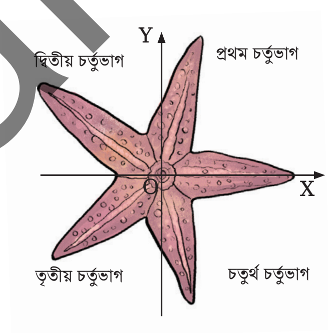
(চ)

(ছ)

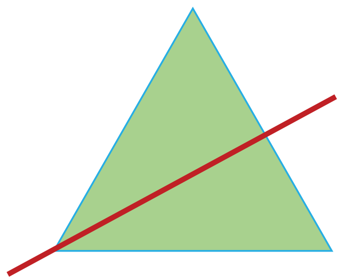
এবার চিন্তা করে দেখো তো, উপরের বস্তুগুলোকে কি এমনভাবে ভাগ করা যায় যে বস্তুর একটি অংশ পরিমাপ করলে সম্পূর্ণ অংশটি খুব সহজে পরিমাপ করা যাবে? তোমাদের দু-একটি উদাহরণ দিচ্ছি।



(জ)



(ঝ)



(ঞ)

দেখতে পাচ্ছ লম্বালম্বি (vertical) রেখাটি হরিণের মুখকে সমান দুইভাগে ভাগ করেছে। একইভাবে আড়াআড়ি (horizontal) রেখাটি তারা মাছটিকে সমান দুইভাগে ভাগ করেছে। আরও লক্ষ করো যে একটি রেখা ত্রিভুজটিকে সমান দুইভাগে ভাগ করেছে। এইভাবে সমান ভাগ করার পর একটি অংশকে পরিমাপ করে সম্পূর্ণ বস্তুর পরিমাপ বের করা যায়।

একটি বস্তুকে মাঝ বরাবর ভাগ করলে যখন একটি অংশ অপর অংশের সঙ্গে সম্পূর্ণভাবে মিলে যায় তখন তাকে আমরা প্রতিসম বস্তু হিসেবে চিহ্নিত করি যার প্রতিসমতা (symmetry) বৈশিষ্ট্য রয়েছে। এক্ষেত্রে যে রেখাটি সমান দুইভাগে ভাগ করে সেটাই প্রতিসম রেখা (line of symmetry) ।

একক কাজ

নিচের কাজগুলো নিজে করো এবং তোমার সহপাঠীর সঙ্গে মিলিয়ে দেখো। কোনো গড়মিল হলে সহপাঠীর সঙ্গে আলোচনা করে যুক্তিভিত্তিক সিদ্ধান্ত নাও।

১। উপরের (ঘ) চিত্রের ফুলটিতে কয়টি প্রতিসাম্য রেখা আছে? একটি কাগজে ফুল এঁকে সকল প্রতিসাম্য রেখা দেখাও।

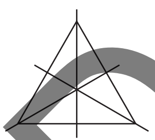
২। উপরের (চ) চিত্রের সমবাহু ত্রিভুজের সকল প্রতিসাম্য রেখা এঁকে দেখাও।

৩। উপরের (ছ) চিত্রের আয়তক্ষেত্রের সকল প্রতিসাম্য রেখা এঁকে দেখাও।

ছবি এঁকে কিংবা কাগজ কেটে এবং ভাঁজ করে বস্তুর প্রতিসমতা এবং প্রতিসম রেখাগুলো খুঁজে বের করা সম্ভব হয়। এখন এসো একটি জোড়ায় কাজের মাধ্যমে আমরা অনুসন্ধান করি।

জোড়ায় কাজ

নিচের চিত্রগুলো কাগজ কেটে তৈরি করো। অতঃপর ভাঁজ করে উভয় অংশ মিলাতে চেষ্টা করো এবং সহপাঠীর সঙ্গে আলোচনার মাধ্যমে ছক-৮.১ পুরণ করো।

ছক-৮.১		
চিত্র	মাঝ বরাবর ভাঁজ করলে মিলে যায় / মিলে যায় না।	প্রতিসম রেখার সংখ্যা
১। সমবাহু ত্রিভুজ 	মিলে যায়	3
২। আয়ত		
৩। সুষম ষড়ভুজ		
৪। বিষমবাহু ত্রিভুজ	মিলে যায় না	
৫। সুষম পঞ্চভুজ		
৬। ইংরেজি বর্ণ T		
৭। ইংরেজি বর্ণ L		

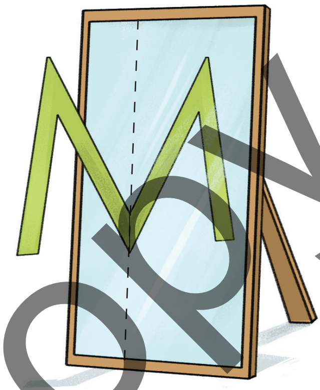
একক কাজ

তোমার চারপাশের পরিচিত পরিবেশ থেকে ৫টি প্রতিসম বস্তুর নাম লিখে চিত্র আঁকো। এদের প্রতিসম রেখাগুলো চিহ্নিত করো।

আয়না দিয়ে প্রতিসমতা পরীক্ষা করি

প্রতিসমতা বোঝার জন্য আমরা আরেকটা কাজ করতে পারি । আমরা এক্ষেত্রে আয়না ব্যবহার করতে পারি। প্রথমে কাগজ কেটে একটি প্রতিসম আকৃতির কাঠামো তৈরি করো। ধরা যাক, তুমি ইংরেজি বর্ণ M এর একটি আকৃতি তৈরি করলে। অতঃপর M কে এমনভাবে কাটো যেন একটি অংশকে পাশের চিত্রের মতো আয়নার সামনে রাখলে প্রতিফলিত হয়ে সম্পূর্ণ M তৈরি হয় ।

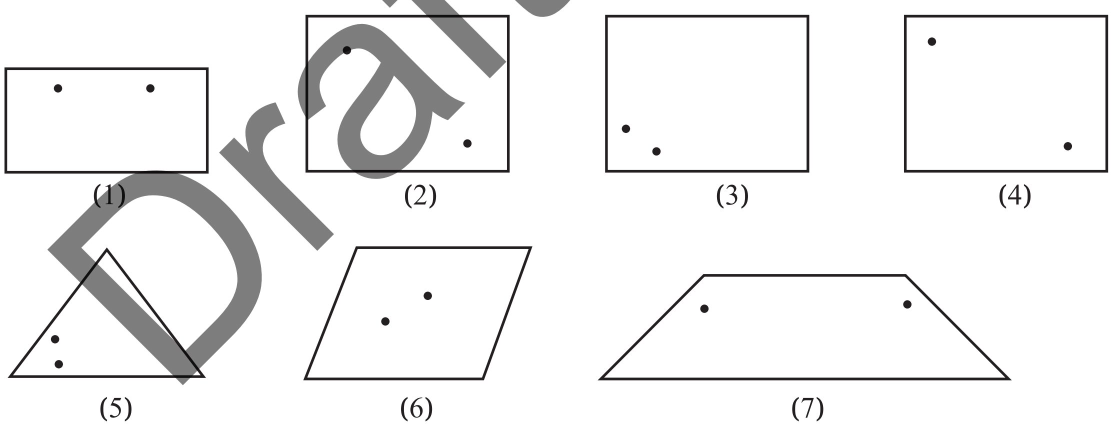
কী দেখতে পেলে? নিশ্চয়ই সম্পূর্ণ M কে দেখতে পেলে । এক্ষেত্রে M কে যে রেখা বরাবর কেটেছ সেটি হলো প্রতিসাম্য রেখা । এভাবে প্রতিফলনের মাধ্যমে প্রতিসমতা শনাক্ত করা যায় বলে রেখা প্রতিসমতাকে প্রতিফলন প্রতিসমতাও (reflectional symmetry) বলা হয়।



আয়না দিয়ে প্রতিসমতা পরীক্ষা

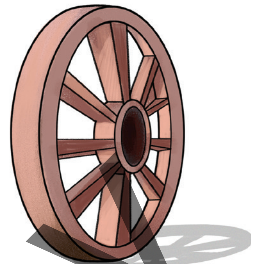
একক কাজ :

প্রদত্ত আকৃতিগুলোর প্রতিসম রেখা অঙ্কন করো।



আমরা রেখার সাপেক্ষে প্রতিসমতা দেখলাম। এবার তোমরা অন্য কোনোভাবে কোনো বস্তুকে প্রতিসম দেখানো যায় কি না তা একটু চিন্তা করো।

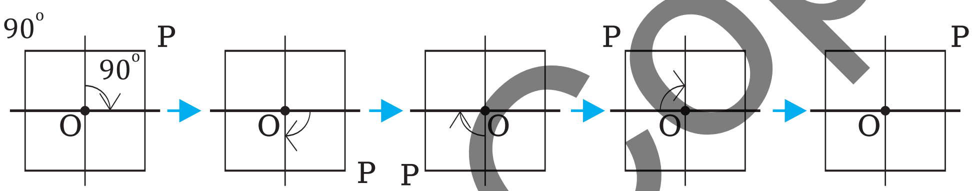
চাকার ছবিটি ভালোমতো পর্যবেক্ষণ করো। চিন্তা করে বলো তো চাকাটিকে 40° ডিগ্রি কোণে একবার ঘুরানো হলে চাকাটি দেখতে একই রকম দেখাবে কি? ঘূর্ণনের ফলে তার আকার বা আকৃতিতে কোনো পরিবর্তন হবে? পরিবর্তন হলে তা কী ধরনের পরিবর্তন? এক্ষেত্রে চাকাটি দেখতে একই রকম দেখালেও বিভিন্ন অংশের অবস্থানের পরিবর্তন হবে।



এখানে চাকাটিকে 40° ডিগ্রি কোণে 9 বার ঘুরানো হলে ($40^\circ \times 9 = 360^\circ$) তা আবার আগের অবস্থায় ফিরে আসবে। অর্থাৎ চাকাটির মধ্যে ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে। এক্ষেত্রে ঘূর্ণন কোণ 40 ডিগ্রি এবং প্রতিসমতার মাত্রা 9।

ধরো, তুমি নিচের চিত্রের মতো করে একটি বর্গক্ষেত্র এঁকেছ। এরপর বর্গটিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে 90 ডিগ্রি কোণে ঘুরাও।

ঘুরানোর সময় লক্ষ করো কতবার 90 ডিগ্রি কোণে ঘুরানোর পর বর্গক্ষেত্রটি পূর্বের অবস্থায় ফিরে এসেছে।



আমরা দেখলাম বর্গক্ষেত্রটি একটি নির্দিষ্ট কোণে ঘূর্ণনের পর দেখতে একই রকম হয় এবং একটি নির্দিষ্ট সংখ্যকবার উক্ত কোণে ঘূর্ণনের পর আগের অবস্থায় ফিরে আসে। বস্তুটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘুরে। যে বিন্দুকে কেন্দ্র করে কোনো প্রতিসম বস্তুকে ঘুরানো হয় তাকে ঘূর্ণন কেন্দ্র বলে। কোনো বস্তুকে ঘড়ির কাঁটার দিকে যেমন ঘোরানো যায়। আবার ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকেও ঘোরানো যায়। এক্ষেত্রে ঘূর্ণন কেন্দ্র, ঘূর্ণন কোণ ও ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রার কোনো পরিবর্তন হয় না। শুধু ঘূর্ণন দিকের পরিবর্তন হয়। তাহলে আমরা বলতে পারি, যে বস্তুর ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে তার মধ্যে চারটি বিষয় রয়েছে।

১. ঘূর্ণন কোণ　　২. ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা　　৩. ঘূর্ণন কেন্দ্র　　৪. ঘূর্ণনের দিক

উপরের বর্গের ক্ষেত্রে ঘূর্ণন কোণ, ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা, ঘূর্ণন কেন্দ্র এবং ঘূর্ণনের দিকগুলো চিহ্নিত করে লেখো।

একক কাজ

খাতায় ছবি এঁকে নিচের ফাঁকা ঘরগুলো পূরণ করো।

ছক-৮.২		
চিত্র	ঘূর্ণন কোণ	ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা
১) বর্গক্ষেত্র		
২) সমবাহু ত্রিভুজ		
৩) সুষম ষড়ভুজ		
৪) বিষমবাহু ত্রিভুজ		
৫) সুষম পঞ্চভুজ		
৬) ইংরেজি বর্ণ T		
৭)		
৮)		
৯)		

পৃথিবীতে নিশ্চয়ই এমন অনেক বস্তু রয়েছে যাদের মধ্যে রেখা প্রতিসমতা ও ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে। তোমার চারপাশে পর্যবেক্ষণ করে সেই বস্তুগুলো খুঁজে বের করো। তাদের নাম এবং বস্তুগুলোকে নির্বাচন করার কারণ এখানে লেখো।

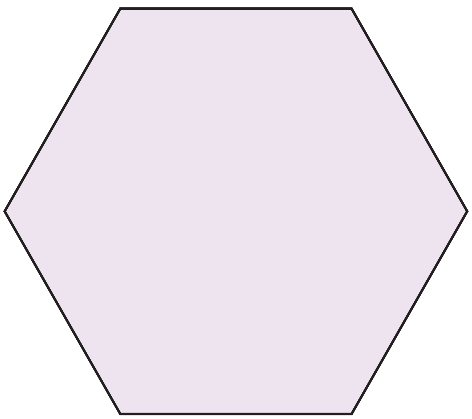
দলগত কাজ

দলে আলোচনা করে নিচের ছক-৮.৩ পূরণ করো।

ছক-৮.৩					
চিত্র	রেখা প্রতিসমতা	প্রতিসাম্য রেখার সংখ্যা	ঘূর্ণন প্রতিসমতা	ঘূর্ণন কোণ	ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা
বর্গক্ষেত্র					4
ইংরেজি বর্ণ H			হ্যাঁ		
ইংরেজি বর্ণ Z	নেই				
বৃত্ত	হ্যাঁ				অসীম

প্রতিসমতা ব্যবহার করে বাগান সাজাই

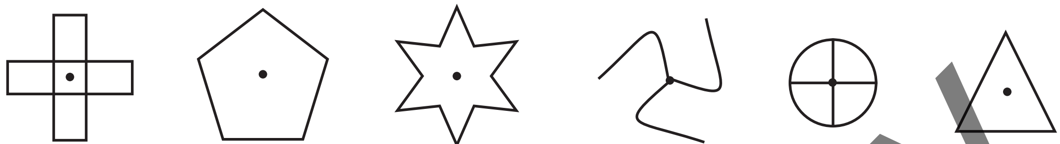
চিত্রে একটি সুষম ষড়ভুজ আকৃতির বাগানের জমির মডেল দেওয়া আছে যার প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য 10 মিটার। তোমাদের কাজ হলো এই বাগানটিকে বিভিন্ন ফুল গাছের চারা দিয়ে সাজানো। তোমাদের প্রত্যেক দল সমান আকৃতির জমি পাবে।



- প্রতিসমতার বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে বাগানটিকে 6টি সমান ভাগে ভাগ করো। মনে করো তোমার দল একটি ভাগ পেল। প্রাপ্ত বাগানের অংশটির পরিমাণ কত?
- সম্পূর্ণ বাগানের ক্ষেত্রফল কত?
- মনে করো শিক্ষক বাগান করার জন্য প্রতিটি দলকে 500 টাকা প্রদান করলেন। প্রতিটি দল এই টাকার মধ্যে গাছ কিনে তাদের অংশ সাজাবে। সম্পূর্ণ বাগানটি সাজাতে কত টাকা খরচ হবে?
- সম্পূর্ণ বাগানের পরিমাপ কীভাবে খুঁজে পেলে ব্যাখ্যা করে লেখো।
- এই বাগানটিকে সর্বাধিক কতটি সমান ভাগে ভাগ করা যেতে পারে। উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

অনুশীলনী

১. নিচের চিত্রগুলোর ঘূর্ণন কোণ এবং ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা নির্ণয় করো।

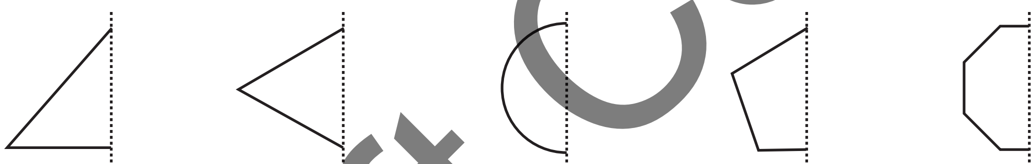


(ক) (খ) (গ) (ঘ) (ঙ) (চ)

২. (ক) এক মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা বলতে কী বোঝ? একমাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতার ঘূর্ণন কোণ কত?

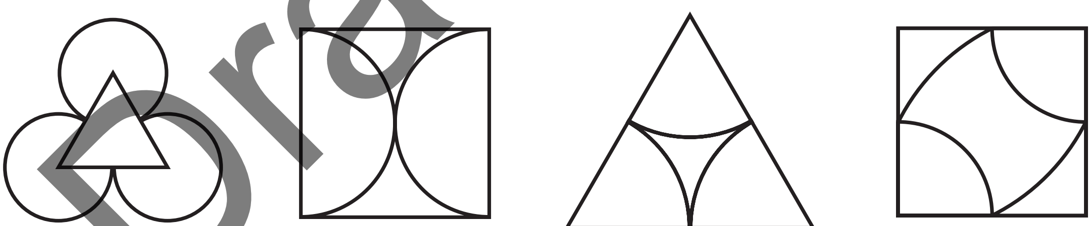
(খ) প্রতিসাম্য কোণ 20 ডিগ্রি হতে পারে কি? কারণ উল্লখ করো।

৩। নিচের চিত্রগুলোতে প্রতিসাম্য রেখা দেওয়া আছে। চিত্রগুলো সম্পন্ন করো।

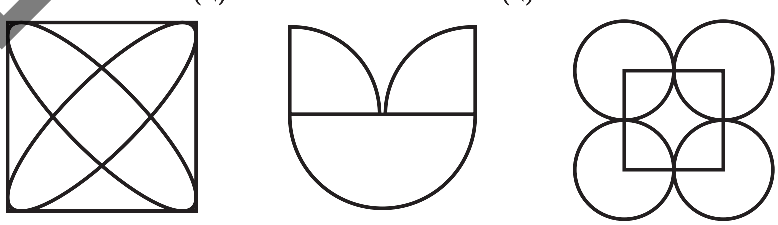


(ক) (খ) (গ) (ঘ) (ঙ)

৪। নিচের চিত্রগুলোর প্রতিসাম্য রেখা অঙ্কন করো।



(ক) (খ) (গ) (ঘ)

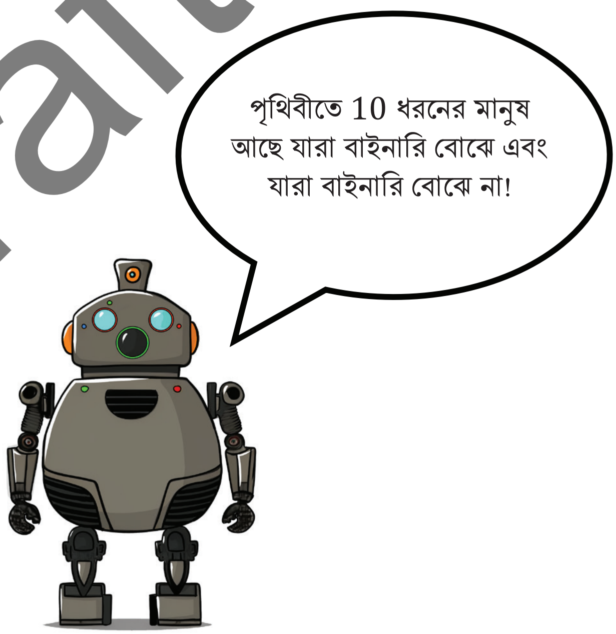


(ঙ) (চ) (ছ)

বাইনারি সংখ্যা পদ্ধতি

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে

- সংখ্যা পদ্ধতির ভিত্তির স্পষ্ট ধারণা
- বাইনারি সংখ্যার প্রয়োজনীয়তা এবং ব্যবহার
- বাইনারি এবং দশভিত্তিক সংখ্যার পারস্পরিক রুপান্তর
- বাইনারি সংখ্যার বিভিন্ন অপারেশন

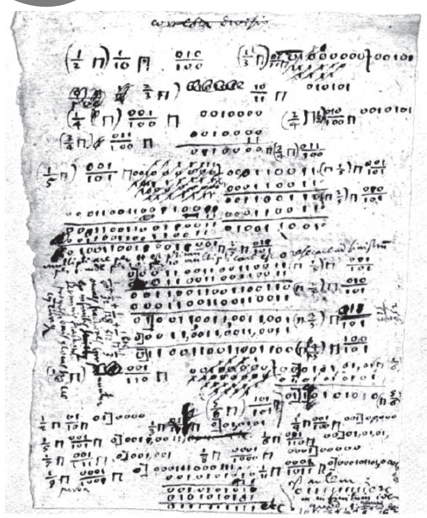


বাইনারি সংখ্যা পদ্ধতি

সপ্তম শ্রেণিতে তোমরা বাইনারি (দুইভিত্তিক) সংখ্যাপদ্ধতি নিয়ে কাজ করেছ। তোমাদের মনে নিশ্চয়ই প্রশ্ন জেগেছে যে আমাদের গণনার সব কাজ দশভিত্তিক অর্থাৎ দশমিক সংখ্যাপদ্ধতি দিয়ে সমাধান করার পরও কেন বাইনারি সংখ্যাপদ্ধতি শিখছি। সেই প্রশ্নের জবাব খোঁজার আগে চলো আমরা জেনে নিই বাইনারি সংখ্যাপদ্ধতি কীভাবে এলো।

বাইনারি সংখ্যাপদ্ধতির প্রবক্তা হলেন জার্মান গণিতবিদ গটফ্রিড ভিলহেল্ম লিবনিজ (Gottfried Wilhelm Leibniz)। তাঁর অন্যতম একটি আলোচনা ছিল ধর্মীয় দর্শনের ভাষাকে কীভাবে গাণিতিক যুক্তিতে রূপান্তর করা যায়। এই চিন্তা থেকে তিনি দশটি দশভিত্তিক অঙ্ক দিয়ে প্রকাশ করা যায় এমন সমস্ত সংখ্যাকে কেবল 0 এবং 1 দিয়ে প্রকাশ করার চেষ্টা করলেন। শুধু চেষ্টাই নয়, দশভিত্তিক সংখ্যা দিয়ে সম্পন্ন করা যায় এমন সব গাণিতিক প্রক্রিয়াই (যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ) তিনি এই দুইটি সংখ্যা দিয়ে করে দেখালেন যা তিনি ১৭০৩ সালে প্রকাশ করেন “Explanation of the Binary Arithmetic” নামে। দেড়শ বছর পর জর্জ বুল (George Boole) নামের একজন আইরিশ বিদ্যালয়ের শিক্ষক ১৮৪৭ সালে তাঁর “The Mathematical Analysis of Logic” পুস্তিকায় লেখেন যে আমাদের দৈনন্দিন জীবনে যা ঘটে তা কিছু সত্য এবং মিথ্যার সমন্বয়, যেগুলোকে আমরা 0 এবং 1 দিয়ে প্রকাশ করতে পারি। কিন্তু বুলের বক্তব্য লিবনিজের তত্ত্বের বীজগাণিতিক প্রকাশ, যা আধুনিক কম্পিউটারে বিদ্যুতের উপস্থিতি এবং অনুপস্থিতির ঘটনাকে গাণিতিক যুক্তির ছকে বেঁধে ফেলতে যুগান্তকারী ভূমিকা রেখেছে।

Gottfried Wilhelm Leibniz



লিবনিজের হস্তাক্ষরে লেখা বাইনারি গাণিতিক প্রক্রিয়া

জর্জ বুলের দেখানো বুলিয়ান বীজগণিতের (Boolean Algebra) সাহায্যে কীভাবে কম্পিউটারের গঠন সম্পন্ন হয় তা তোমরা ডিজিটাল প্রযুক্তি বিষয়ে এবং উচ্চতর শ্রেণিতে শিখবে। কিন্তু সে পর্যন্ত পৌঁছাতে তোমাদের লিবনিজের দেখানো গাণিতিক প্রক্রিয়াগুলো শেখা প্রয়োজন।

সেই বিষয়ে আরেকটু পরিষ্কার করার আগে বাইনারি সংখ্যাপদ্ধতি নিয়ে তোমার কতটুকু মনে আছে একটু পরখ করে নেওয়া যাক।

কুইজ

১। Bit-এর পূর্ণ রূপ কী?

২। বাইনারি সংখ্যা পেদ্ধতিতে কেবল দুইটি অঙ্ক ব্যবহার হয় কেন যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করো।

৩। বাইনারি 1011কে দশভিত্তিক সংখ্যায় প্রকাশ করলে কত হবে?

৪। দশভিত্তিক 11কে বাইনারিতে প্রকাশ করলে কত হবে?

আচ্ছা, বেশ ভালই শিখেছিলে মনে হচ্ছে! এবার বলি বাইনারি শিখে কী হবে।

তোমাদের মধ্যে যারা কম্পিউটারে কাজ করেছ বা গেইম খেলেছ, খেয়াল করেছ যে কাজটা বা খেলাটা সংরক্ষণ (save) করে রাখা যায়। আমরা যখন একটি চিঠি বা বই পাই, সেটি আমাদের টেবিলে বা ড্রয়ারে সংরক্ষণ করি। আমাদের সুন্দর সুন্দর স্মৃতিগুলো মাথায় সংরক্ষণ করি। কিন্তু তোমার করা কাজ কম্পিউটার কোথায় সংরক্ষণ করে? কম্পিউটারেরও কি স্মৃতি (memory) আছে? যদি থাকে তাহলে এই মেমোরি কীভাবে কাজ করে? এই বিষয়ে তোমার কী ধারণা তা এক লাইনে নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো।

প্রতিদিনই আমাদের কম্পিউটারের উপর নির্ভরতা বাড়ছে। কম্পিউটার কীভাবে কাজ করে তা বুঝতে না পারলে আমরা এর পরিপূর্ণ ব্যবহার করতে পারব না। এই যন্ত্রটি কাজ করে বাইনারি সংখ্যা নির্ভর গাণিতিক পদ্ধতিতে। আমরা প্রতিনিয়ত যেমন যোগ-বিয়োগ করি, কম্পিউটারও করে, তবে বাইনারি পদ্ধতিতে। তাই বাইনারিতে যোগ-বিয়োগ-গুণ-ভাগ করতে পারলে আমরা অনেকটাই বুঝতে পারব কম্পিউটার কীভাবে কাজ করে।

ভিত্তি (Base)

দশভিত্তিক সংখ্যাপদ্ধতিতে মোট ডিজিট 10টি, 0 থেকে 9 পর্যন্ত। তাই এর ভিত্তি 10। দশভিত্তিক সংখ্যা 250 কে প্রকাশ করা হয় এভাবে : $(250)_{10}$.

আবার বাইনারিতে মোট ডিজিট 2টি, 0 এবং 1 । তাই এর ভিত্তি 2 । বাইনারি সংখ্যা 1011কে প্রকাশ করা হয় এভাবে :

$(1011)_2$ ।

স্থানীয় মান (Place Value)

দশভিত্তিক সংখ্যা পদ্ধতিতে কোনো একটি সংখ্যার বিভিন্ন ডিজিটের স্থানীয় মান শিখেছো। এখানে আমরা বাইনারি সংখ্যা পদ্ধতির কোনো একটি সংখ্যার বিভিন্ন ডিজিটের স্থানীয় মান শিখবো। নিচে একটি তুলনামূলক আলোচনা উপস্থাপন করা হলো।

দশমিক সংখ্যা পদ্ধতি

$1\ 2\ 5\ 0_{10}$

0×10^0

5×10^1

2×10^2

1×10^3

বাইনারি সংখ্যা পদ্ধতি

$1\ 0\ 1\ 1_2$

1×2^0

1×2^1

0×2^2

1×2^3

একক কাজ: বাইনারি সংখ্যা $(11011)_2$ এর প্রতিটি ডিজিটের স্থানীয় মান লেখো।

র‍্যাডিক্স পয়েন্ট (Radix Point)

একটি সংখ্যার দুইটি অংশ থাকতে পারে, পূর্ণাংশ এবং ভগ্নাংশ। Radix Point দ্বারা পূর্ণাংশ এবং ভগ্নাংশকে পৃথক করা হয়। যেমন–

2 0 2 3 . 1 9 7 1

পূর্ণাংশ ভগ্নাংশ

র‍্যাডিক্স পয়েন্ট (Radix Point)

সিগনিফিকেন্ট ডিজিট (Significant Digit)

সংখ্যা পদ্ধতিতে কোনো একটি সংখ্যার সর্ববৃহৎ স্থানীয় মান ধারণকারী ডিজিটকে বলে most significant digit এবং সর্বনিম্ন স্থানীয়মান ধারণকারী ডিজিটকে বলে least significant digit । বাইনারি সংখ্যাপদ্ধতিতে ডিজিটকে বিট (Bit) বলা হয়। সুতরাং বাইনারি সংখ্যাপদ্ধতিতে most significant bit কে MSB বলে এবং least significant bit কে LSB বলে।

উদাহরণ:

$(1011)_2$

LSB

MSB

ডিজিটাল যন্ত্রে 0 এবং 1 এর ব্যবহার

বাইনারি পদ্ধতিটি যেহেতু যন্ত্রে ব্যবহৃত হয় এবং যন্ত্র বিদ্যুতের উপস্থিতি ও অনুপস্থিতি ছাড়া আর কিছুই শনাক্ত করতে পারে না, তাই বিদ্যুতের অনুপস্থিতির জন্য 0 এবং বিদ্যুতের উপস্থিতির জন্য 1 ব্যবহার করা হয়।

রূপান্তর (Conversion)

আমরা গণনা করি দশভিত্তিক সংখ্যা পদ্ধতিতে। তাই দশভিত্তিক সংখ্যা পদ্ধতি হলো মানুষের ভাষা (Human Language) এর অংশ। আর ইলেক্ট্রনিক যন্ত্র বস্তুত বাইনারি সংখ্যার নির্দেশ ছাড়া আর কিছুই শনাক্ত করতে পারে না, তাই বাইনারি হলো যন্ত্রের ভাষা বা Machine Language। যন্ত্রের ভাষা যন্ত্র তৈরি করেনি, মানুষই করেছে। তবে যন্ত্রকে আমাদের তরফ থেকে কোনো স্বয়ংক্রিয় কাজের নির্দেশনা দেওয়ার জন্য মানুষের ভাষাকে যন্ত্রের ভাষায় অনুবাদ বা রূপান্তর করে দিতে হয়।

দশভিত্তিক থেকে বাইনারি

দশভিত্তিক সংখ্যার পূর্ণাংশকে 2 দ্বারা ভাগ করতে থাকলে ভাগশেষগুলোকে নিচ থেকে উপরে সাজালে পূর্ণাংশের বাইনারি মানটি পাওয়া যাবে এবং দশভিত্তিক সংখ্যার ভগ্নাংশকে 2 দ্বারা গুণ করতে থাকলে গুণফলের পূর্ণাংশকে উপর থেকে নিচে সাজালে ভগ্নাংশের বাইনারি মানটি পাওয়া যাবে।

উদাহারণ: $(23.25)_{10}$ কে বাইনারিতে প্রকাশ করো।

সমাধান:

a. $(23)_{10} = (?)_2$

2	23	ভাগশেষ	
2	11	1	LSB
2	5	1	
2	2	1	
2	1	0	
	0	1	MSB

$\therefore (23)_{10} = (10111)_2$

b. $(0.25)_{10} = (?)_2$

		.25
		× 2
MSB	0	.5
		× 2
LSB	1	.0

$\therefore (0.25)_{10} = (.01)_2$

সুতরাং, $(23.25)_{10} = (10111.01)_2$

দশভিত্তিক থেকে বাইনারিতে রূপান্তরের বিকল্প পদ্ধতি

আমরা জানি, প্রতিটি বিটের নির্দিষ্ট স্থানীয় মান রয়েছে। $(23)_{10}$ কে বাইনারিতে রূপান্তর করতে চাই। 23 এর সমান বা সবচেয়ে কাছাকাছি ছোটো স্থানীয় মান হলো 16। তাহলে প্রথমে 16 পর্যন্ত বাইনারির স্থানীয় মানগুলো বসাই। এবার 16 এর উপর 1 বসাই। অর্থাৎ আমাদের হাতে 1টি 16 আছে।

1					
16	8	4	2	1	→ স্থানীয় মান

দশভিত্তিক 23 তৈরি করতে আরও 7 দরকার। 4, 2 এবং 1 মিলিয়ে 7 হয়। তাহলে 4, 2 এবং 1 এর উপরেও 1 করে বসাই। আর বাকি যে সব স্থানীয় মান ব্যবহার করিনি তাতে 0 বসিয়ে দিই।

1	0	1	1	1	
16	8	4	2	1	→ স্থানীয় মান

$\therefore (23)_{10} = (10111)_2$

বাইনারি থেকে দশভিত্তিক

প্রতিটি বিটের স্থানীয় মানকে ঐ বিট দ্বারা গুণ করে গুণফলগুলোর সমষ্টি নিলে তা হবে কাঙ্ক্ষিত দশভিত্তিক সংখ্যাটি। যেমন–

$(101101)_2 = (?)_{10}$

1 0 1 1 0 1

$1 \times 2^0 = 1$

$0 \times 2^1 = 0$

$1 \times 2^2 = 4$

$1 \times 2^3 = 8$

$0 \times 2^4 = 0$

$1 \times 2^5 = 32$

$(45)_{10}$

এই কাজটি অন্যভাবেও করা যায়। বিটগুলোর নিচে স্থানীয় মান বসিয়ে যে বিটগুলোতে 1 রয়েছে সেগুলোর স্থানীয় মান যোগ করলেও ফলাফল পাওয়া যায়। যেমন–

1	0	1	1	0	1	
32	16	8	4	2	1	→ স্থানীয় মান

$32 + 8 + 4 + 1 = 45$

$\therefore (101101)_2 = (45)_{10}$

বাইনারি সংখ্যার প্রক্রিয়াকরণ

পূর্বে তোমরা বাইনারি সংখ্যা পদ্ধতির গঠন সম্পর্কে ধারণা পেয়েছ। এখানে আমরা বাইনারি সংখ্যার ক্ষেত্রে যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ কীভাবে সম্পন্ন করে, তা হাতে কলমে শিখব।

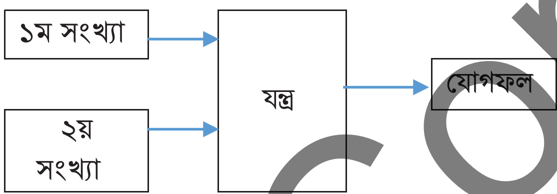
বাইনারি সংখ্যার যোগ

ধরো, তোমাকে দশমিকে 2 আর 3-কে যোগ করতে বলা হলো। তুমি যা করলে তা হলো,

$$2 + 3 = 5$$

কিন্তু এমন একটি যন্ত্র যদি থাকে যেখানে তুমি দুইটি সংখ্যা প্রবেশ করালেই যোগ হয়ে বের হবে!

যেমন,



কিন্তু কোন যন্ত্রকে আমাদের দশভিত্তিক সংখ্যা বোঝানো কঠিন। তাকে বোঝাতে হবে বাইনারি দিয়েই। বাইনারিতে অঙ্ক কেবল দুটি। বাইনারি অঙ্ক দুইটিকে সম্ভাব্য কত উপায়ে যোগ করা যায় তা নিচের ছকে দেখানো হলো।

বাইনারি অঙ্কের যোগের টেবিল				
0	+	0	=	0
0	+	1	=	1
1	+	0	=	1
1	+	1	=	0 হাতে 1

লক্ষ করো, ৪র্থ যোগটি যদি দশভিত্তিকে রূপান্তর করো তাহলে ফলাফল আসে $1 + 1 = 2$; দশভিত্তিক 2 এর বাইনারি মান কত পাশের ফাঁকা ঘরে লেখো:

2_{10} এর বাইনারি প্রকাশে কটি বিট দরকার হচ্ছে পাশের ফাঁকা ঘরে লেখো:

দশভিত্তিক 2 এর বাইনারি মান 10 । এই 10 থেকে 0 লিখে হাতে 1 রাখতে হয়।

তাহলে উপরের নীতি অনুসরণ করে একটি বাইনারি যোগ করে দেখা যাক। তোমাদের সুবিধার জন্য একই সঙ্গে দশভিত্তিক পদ্ধতিতেও দেখানো হলো।

উদাহরণ ১ :

বাইনারি	দশভিত্তিক
1011	11
(+) 101	(+) 5
10000	16

তাহলে দেখা যাচ্ছে দশভিত্তিক সংখ্যার যোগের মতো আমরা অতি সহজেই দুটি বাইনারি সংখ্যার যোগ করতে পারি। তোমরা নিচের কয়েকটি বাইনারি সংখ্যার যোগ চর্চা করো এবং প্রয়োজনে দশভিত্তিক সংখ্যা পদ্ধতিতে রূপান্তর করে শুদ্ধি পরীক্ষা করো।

১।	২।	৩।	৪।	৫।	৬।
101	1101	1111	1011	10101	100001
(+) 11	(+) 111	(+) 1000	(+) 101	(+) 1010	(+) 11110

দশভিত্তিক সংখ্যা পদ্ধতিতে তো ভগ্নাংশও রয়েছে। যেমন–

$$\begin{array}{r} 29.31 \\ (+)\ 5.05 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

উপরের যোগটি কীভাবে করবে? যোগটি করে ফাঁকা ঘরে ফলাফল লেখো। যোগটিতে র‍্যাডিক্স পয়েন্টটি কীভাবে ব্যবহার করেছ সেটি নিচের ফাঁকা ঘরে ব্যাখ্যা করে লেখো।

তোমাদের জন্য স্বস্তির খবর হলো, বাইনারিতেও একই পদ্ধতিতে দশভিত্তিক ভগ্নাংশের যোগ সম্পাদন করা যায়। তাহলে একটি যোগ করে দেখা যাক।

উদাহরণ ২ :

বাইনারি		দশভিত্তিক
1101.101	→	13.625
(+) 1011.011	→	(+) 11.375
11001.000	→	25.000

এবার তবে ঝটপট নিচের বাইনারি যোগগুলো সেরে ফেলো এবং দশভিত্তিক পদ্ধতিতে শুদ্ধি পরীক্ষা করো।

৭।

$$\begin{array}{r} 110.101 \\ (+)\ 110.001 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

৮।

$$\begin{array}{r} 111.111 \\ (+)\ 10.101 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

৯।

$$\begin{array}{r} 1011.10110 \\ (+)\ 110.01101 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

নিচের ছক থেকে তোমার পছন্দের উত্তরটি বেছে নাও :

☐ ক. বাইনারিতে সরাসরি যোগ করে ফেলা সহজ, শুদ্ধি পরীক্ষার দরকার নেই।

☐ খ. দশমিকে রূপান্তর করে আবার বাইনারিতে রূপান্তর করে উত্তর বের করা সহজ।

বাইনারি সংখ্যার বিয়োগ

বাইনারি সংখ্যার বিয়োগ আমরা দশভিত্তিক সংখ্যার বিয়োগের নিয়ম অনুযায়ী করতে পারি। তোমরা দশভিত্তিক সংখ্যার বিয়োগ অনেক বছর ধরেই করছো। জটিলতা অনুধাবন করার জন্য নিচের দশভিত্তিক সংখ্যার বিয়োগ দুটি করো।

সমস্যা ১

$$
\begin{array}{r}
10 \\
(-)\ 4 \\
\hline
\\
\hline
\end{array}
$$

কী পদ্ধতিতে করলে ধাপগুলো ব্যাখ্যা করে লেখো।

সমস্যা ২

$$
\begin{array}{r}
1008 \\
(-)\ 994 \\
\hline
\\
\hline
\end{array}
$$

কী পদ্ধতিতে করলে ধাপগুলো ব্যাখ্যা করে লেখো। আগের বিয়োগের চেয়ে জটিল লেগেছে কি? কোথায় জটিল লেগেছে? লিখে রাখো।

তোমরা অবশ্যই লক্ষ করেছো, সমস্যা ২ সমাধান করার সময় ‘ধার নেওয়া’ অথবা ‘হাতে রাখার’ একটা বিষয় এসেছে। নিচের উদাহরণটি লক্ষ করো।

ধার নেয়া পদ্ধতিতে দুইটি দশভিত্তিক সংখ্যার বিয়োগ

(ধার নেয়া সারি)	0	9	9	9	13	14	10	
	1	0	0	0	4	5	0	1
(–)	0	0	8	0	5	7	3	0
	0	9	1	9	8	7	7	1

বিয়োগের ক্ষেত্রে যখন নিচের অংকটি উপরের অংকটির চেয়ে বড় হয়, তখন উপরের বাম দিকের অংক থেকে একটি দশক ধার নিয়ে উপরের ঐ অংকের সাথে যোগ করতে হয়। এর ফলে বামদিকের অংক থেকে একটি দশক কমে যায়। যেমন, উপরের উদাহারণে বিয়োজ্যের দশকের অংক 3 এর উপরে 0 আছে। এখানে 0 এর বামদিকের অংক 5 থেকে একটি দশক (=10) 0-এর সাথে যোগ করে 10 হয়েছে যা 0 এর উপরে বসানো হয়েছে। আবার 5 থেকে 1 কমে 4 হয়েছে। এখন যেহেতু বিয়োজ্যের শতকের অংক 7, 4 এর চেয়ে বড়, তাই বামের অংকের থেকে একটি দশক নিয়ে 4 এর সাথে যোগ করে 14 করা হয়েছে। অন্যান্য অংকের ক্ষেত্রেও এই নিয়মটি ব্যবহার করা হয়েছে।

তোমাদের কাছে হয়তো উপরের পদ্ধতিটি পরিচিত নয়, তবে তোমরা কিছু অনুশীলন করলে এই পদ্ধতির সাথে পরিচিত হয়ে যাবে।

জোড়ায় কাজ

ধার নেয়া পদ্ধতিতে নিচের বিয়োগফল নির্ণয় কর।

১। 50083 – 9354　　　　　২। 15703 – 15691

যদি এই পদ্ধতিটি না থাকতো তাহলে কেমন হতো? এবার এসো আমরা ধার না নিয়ে অথবা হাতে না রেখে বিয়োগ করার পদ্ধতি শিখি! এজন্য আমাদের পূরক সংখ্যা সম্বন্ধে জানতে হবে।

দশভিত্তিক সংখ্যার পূরক সংখ্যা

বলো তো, 40 এর সাথে কতো যোগ করলে যোগফল 99 হবে? অবশ্যই বলবে, 59 যোগ করলে। এখানে 59, 40 এর পূরক সংখ্যা (complement number)। অন্যদিকে 40, 59 এর পূরক সংখ্যা। অর্থাৎ 99 এর সাপেক্ষে 40 এবং 59 পরস্পর পূরক সংখ্যা। আবার 999 এর সাপেক্ষে 40 এবং 959 পরস্পর পূরক সংখ্যা। দশভিত্তিক সংখ্যা পদ্ধতিতে এই ধরনের পূরক সংখ্যাকে 9 -পূরক সংখ্যা (9's complement) বলে। কোনো একটি সংখ্যা a এর 9-পূরক সংখ্যাকে a^* দ্বারা নির্দেশ করা হয়। $a^* + 1$ কে a এর 10-পূরক সংখ্যা (10's complement) বলে। কোনো একটি সংখ্যা a এর 10-পূরক সংখ্যাকে a^{**} দ্বারা নির্দেশ করা হয়। অর্থাৎ $a^{**} = a^* + 1$.

উদাহরণ: 999 এর সাপেক্ষে 6, 54 এবং 104 এর 9's complement এবং 10's complement বের করো।

সমাধান:

ধরি $a = 54$ তাহলে, 999 এর সাপেক্ষে,

a এর 9's complement $a^* = 999 - 54 = 945$

a এর 10's complement $a^{**} = 945 + 1 = 946$

999 এর সাপেক্ষে 6 এবং 104 এর 9's complement এবং 10's complement তোমরা বের করো।

এবার আমরা দশভিত্তিক সংখ্যা পদ্ধতিতে 'ধার না নিয়ে' অথবা 'হাতে না রেখে' বিয়োগ করবো। এখানে আমরা 9's complement এবং 10's complement এর ধারণাকে ব্যবহার করবো।

উদাহরণ: complement এর ধারণাকে ব্যবহার করে 3064 থেকে 365 বিয়োগ করো।

সমাধান:

যেহেতু 3064 একটি চার অঙ্কের সংখ্যা, সুতরাং 9999 এর সাপেক্ষে 365 এর complement বের করার মাধ্যমে সমাধান করতে হবে।

$$3064 - 365 = 3064 + \underbrace{9999 - 365}_{9's\ \text{complement}} - 9999$$

$$= 3064 + \underbrace{9634 + 1}_{10's\ \text{complement}} - 9999 - 1$$

$$= 3064 + 9635 - 10000$$

$$= 12699 - 10000$$

$$= 2699$$

দশভিত্তিক সংখ্যার বিয়োগের মতো আমরা বাইনারি সংখ্যার বিয়োগ করতে পারি। প্রথমে বাইনারি অঙ্ক দুইটিকে সম্ভাব্য কত উপায়ে বিয়োগ করা যায় তা নিচের ছকে দেখানো হলো।

বাইনারি অঙ্কের বিয়োগের টেবিল				
0	–	0	=	0
0	–	1	=	1, ধার 1
1	–	0	=	1
1	–	1	=	0

এই বিয়োগের নিয়মটি ব্যবহার করে নিচের বিয়োগটি করো।

একক কাজ

নিচের বাইনারি সংখ্যাকে দশভিত্তিক সংখ্যায় রুপান্তর কর এবং উভয় পদ্ধতিতে বিয়োগ করে সত্যতা যাচাই কর।

বাইনারি		দশভিত্তিক
1011	→	
(–) 101	→	
	→	

মাথা খাটাও

- কী পদ্ধতিতে করলে ধাপগুলো ব্যাখ্যা করে লেখো।
- কোনো ভুল করেছিলে? কোনো ধাপের পুনরাবৃত্তি করতে হয়েছে?

নিচের বিয়োগগুলো করো এবং শুদ্ধি পরীক্ষা করো।

১০।
$$\begin{array}{r} 110 \\ (-)\ 110 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

১১।
$$\begin{array}{r} 111 \\ (-)\ 101 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

১২।
$$\begin{array}{r} 101110 \\ (-)\ 11001 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

১৩।
$$\begin{array}{r} 10110 \\ (-)\ 11001101 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

বাইনারি ভগ্নাংশের বিয়োগ দশভিত্তিক ভগ্নাংশের বিয়োগের মতোই। তাহলে নিচের বাইনারি বিয়োগগুলো করো এবং শুদ্ধি পরীক্ষা করো।

১৪।
$$\begin{array}{r} 110.101 \\ (-)\ 110.001 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

১৫।
$$\begin{array}{r} 111.111 \\ (-)\ 10.101 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

১৬।
$$\begin{array}{r} 1011.10110 \\ (-)\ 110.01101 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

১৭।
$$\begin{array}{r} 1011.10110 \\ (-)\ 110.01101 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

দশভিত্তিক সংখ্যার ধার নেওয়া পদ্ধতির বিয়োগের মতো আমরা বাইনারি সংখ্যারও বিয়োগ করতে পারি। নিচের উদাহরণটি লক্ষ্য কর।

ধার নেয়া পদ্ধতিতে দুইটি বাইনারি সংখ্যার বিয়োগ

(ধার নেয়া সারি)	0	1	10	1	1	10	10
	1	0	1	0	0	1	0
(−)	0	0	1	0	1	1	1
	0	1	1	1	0	1	1

জোড়ায় কাজ

ধার নেয়া পদ্ধতিতে নিচের বাইনারি সংখ্যাগুলোর বিয়োগফল নির্ণয় কর।

১। $10011 - 1001$ ২। $110111 - 10001$

দশভিত্তিক পদ্ধতির পূরক সংখ্যার সঙ্গে তুলনা করে আমরা সহজেই বাইনারিতে বিয়োগ সেরে ফেলতে পারি।

বাইনারি সংখ্যার পূরক

দশভিত্তিক সংখ্যার মতো কোনো একটি বাইনারি সংখ্যা a এর 1-পূরক (1's complement) সংখ্যাকে a^* দ্বারা নির্দেশ করা হয়। এবং a এর 2-পূরক (2's complement) সংখ্যাকে a^{**} দ্বারা নির্দেশ করা হয়। অর্থাৎ $a^{**} = a^* + 1$.

উদাহরণ: বাইনারি সংখ্যা 101101 এর 1's complement এবং 2's complement বের করো।

সমাধান: ধরি $a = 101101$. তাহলে,

a এর 1's complement $a^* = 111111 - 101101 = 010010$

a এর 2's complement $a^{**} = 010010 + 1 = 010011$

একক কাজ

নিচের বাইনারি সংখ্যা গুলোর 1's complement এবং 2's complement বের করো।

(i) 1011 (ii) 1100 (iii) 10001

এবার আমরা বাইনারি সংখ্যা পদ্ধতিতে 'ধার না নিয়ে' অথবা 'হাতে না রেখে' বিয়োগ করবো। এখানে আমরা 1's complement এবং 2's complement এর ধারণাকে ব্যবহার করবো।

উদাহরণ: $100011 - 101 = 100011 + \underbrace{111111 - 101}_{1's\text{ complement}} - 111111$

$$= 100011 + \underbrace{111010 + 1}_{10's\text{ complement}} - 111111 - 1$$

$$= 100011 + 111011 - 1000000$$

$$= 1011110 - 1000000$$

$$= 11110$$

জোড়ায় কাজ

পূরক সংখ্যার ধারণা ব্যবহার করে নিচের বাইনারি সংখ্যার বিয়োগফল বের করো।

(i) 1011 – 101 (ii) 101001 – 100110 (iii) 1110101 – 100011

গাণিতিক প্রক্রিয়াগুলো করার সময় তোমার মনে কোনো প্রশ্ন এলে নিচের ফাঁকা ঘরে লিখে রাখো।

বাইনারি গুণ

এতক্ষণ আমরা বাইনারি সংখ্যার যোগ ও বিয়োগ শিখলাম। বাকি থাকে গুণ আর ভাগ। গুণ বেশ সহজ, দশমিকের পদ্ধতির সঙ্গে বাইনারি গুণের হিসেবের মিল রয়েছে। এসো দেখে নিই বাইনারিতে গুণ কীভাবে সম্পন্ন করে। বাইনারি গুণের মৌলিক নীতি খুব সহজ। গুণের নিয়মের ছকটি নিচে দেয়া হলো।

বাইনারি অঙ্কের গুণের টেবিল				
0	×	**0**	=	**0**
0	×	**1**	=	**0**
1	×	**0**	=	**0**
1	×	**1**	=	**1**

তাহলে এবার একটি উদাহরণ দেখে নিই

উদাহরণ : $(1011)_2 \times (101)_2 = (?)_2$

		1	0	1	1		11
		(×)	1	0	1		(×) 5
		1	0	1	1		
	0	0	0	0	×		
1	0	1	1	×	×		
1	1	0	1	1	1		55

তাহলে কয়েকটি বাইনারির গুণ সেরে নাও।

১৮।

1101
(×) 111

১৯।

101110
(×) 11001

২০।

100001
(×) 11110

২১।

111.111
(×) 10.101

বাইনারি ভাগ

আমরা বাইনারি সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ কীভাবে করতে হয় তা জেনেছি। দুইটি বাইনারি সংখ্যাকে ভাগ করার সময় আমাদের কিছু নিয়ম মেনে চলতে হয়। দশভিত্তিক পদ্ধতির মতোই বাইনারি সংখ্যা পদ্ধতিতেও 0 দিয়ে ভাগ করা অসংজ্ঞায়িত। বাইনারি ভাগের নিয়মগুলো দেখে নিই :

বাইনারি অঙ্কের ভাগের টেবিল				
0	÷	0	=	অসংজ্ঞায়িত
0	÷	1	=	0
1	÷	0	=	অসংজ্ঞায়িত
1	÷	1	=	1

এই নিয়মগুলো ব্যবহার করে দুইটি দশভিত্তিক সংখ্যার ভাগের মতো করেই দুটি বাইনারি সংখ্যার ভাগ করা যায়।

একটা উদাহরণ দেখি :

$$\begin{array}{r} 1011)\ 110111\ (101 \\ -\ 1011 \\ \hline 1011 \\ -\ 1011 \\ \hline 0 \end{array}$$

জোড়ায় কাজ ১

ভাগ পদ্ধতিতে নিচের বাইনারি সংখ্যাকে ভাগ করো।

১। $1010 \div 10$ ২। $111011 \div 1011$ ৩। $10111010 \div 1001$

জোড়ায় কাজ ২

নিচে দশভিত্তিক সংখ্যার কয়েকটি ভাগ দেওয়া আছে। সেগুলোকে বাইনারিতে রূপান্তর করে ভাগ করো।

১। $100 \div 25$ ২। $77 \div 7$ ৩। $85 \div 5$ ৪। $128 \div 32$

অনুশীলনী

১। নিচের বাইনারি সংখ্যাগুলোকে দশভিত্তিক সংখ্যায় রূপান্তর করো।

i) 010101 ii) 110011 iii) 100011 iv) 101000
v) 101100 vi) 001100.101 vii) 010010.111 viii) 0010111111.11

২। নিচের দশভিত্তিক সংখ্যাগুলোকে বাইনারিতে রূপান্তর করো।

i) 6 ii) 19 iii) 56 iv) 129
v) 127 vi) 96 vii) 25 viii) 200

৩। নিচের বাইনারি সংখ্যাগুলোর যোগফল নির্ণয় করো।

i) $101111 + 101101$ ii) $10101 + 100010$ iii) $1010101 + 1000001$

৪। নিচের দশভিত্তিক সংখ্যাগুলোকে বাইনারিতে রূপান্তর করে যোগগুলো সম্পন্ন করো।

i) 6 + 19 ii) 10 + 32 iii) 56 + 16 iv) 127 + 127

৫। নিচের বাইনারি সংখ্যাগুলোর বিয়োগ করো।

i) 1001 – 101 ii) 11001 – 1011 iii) 1010010 – 111011

৬। নিচের দশভিত্তিক সংখ্যাগুলোর 10’s Complement নির্ণয় করো।

i) 2351 ii) 90152 iii) 10003 iv) 9999

৭। পূরক ব্যবহার করে নিচের দশভিত্তিক সংখ্যার বিয়োগফল নির্ণয় করো।

i) 43101 – 5032 ii) 70081 – 6919 iii) 2173901 – 5835

৮। নিচের বাইনারি সংখ্যাগুলোর 2’s Complement নির্ণয় করো।

i) 1111 ii) 1011001 iii) 1010101 iv) 1000001

৯। পূরক ব্যবহার করে নিচের বাইনারি সংখ্যার বিয়োগফল নির্ণয় করো।

i) 11001 – 1001 ii) 100101 – 10011 iii) 11000101 – 101101

১০। নিচের দশভিত্তিক সংখ্যাগুলোকে বাইনারিতে রূপান্তর করে গুণ করে দেখাও।

i) 18 × 6 ii) 32 × 23 iii) 21 × 7 iv) 59 × 18

v) 118.2 × 46 vi) 180.50 × 65 vii) 192 × 22 viii) 111 × 101

১১। নিচের দশভিত্তিক সংখ্যাগুলোকে বাইনারিতে রূপান্তর করে ভাগ করে দেখাও।

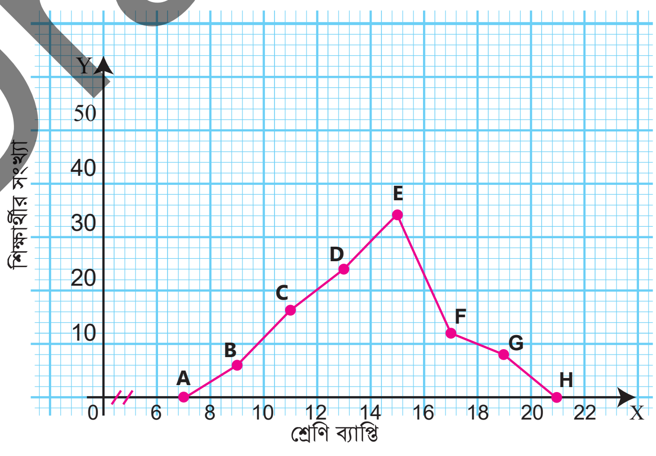
i) 16 ÷ 4 ii) 34 ÷ 17 iii) 15 ÷ 3 iv) 99 ÷ 99

v) 157 ÷ 46 vi) 180 ÷ 69 vii) 192 ÷ 22 viii) 111 ÷ 101

তথ্য বুঝে সিদ্ধান্ত নিই

এই অভিজ্ঞতায় শিখতে পারবে

- উপাত্ত প্রক্রিয়াকরণ
- তথ্য ও উপাত্ত উপস্থাপন
- গণসংখ্যা বহুভুজ
- অজিভ রেখা
- কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ



তথ্য বুঝে সিদ্ধান্ত নিই

আগের শ্রেণিতে আমরা তথ্য ও উপাত্ত সমন্ধে মৌলিক ধারণা লাভ করেছি এবং বিস্তারিত জেনেছি। এই অভিজ্ঞতায় আমরা তথ্যের উৎসের ধরন, সঠিক উৎস নির্বাচনের প্রক্রিয়াসহ তথ্য বিশ্লেষণ ও উপস্থাপনের বিভিন্ন উপায় সম্পর্কে জানার চেষ্টা করব। যাতে কোনো সমস্যা সমাধানে আমরা কার্যকরী সিদ্ধান্ত নিতে পারি। আমাদের দৈনন্দিন জীবনেও বিভিন্ন কাজে সিদ্ধান্ত নেয়ার ক্ষেত্রে যখন তথ্য সংগ্রহ করি তখন তথ্যের উৎসের উপর কতটুকু নির্ভর করা যায় তা শনাক্ত করা প্রয়োজন। এই গণিত বইয়ের প্রথম অভিজ্ঞতার মধ্য দিয়ে তোমরা জেনেছ যে সঠিক/কার্যকরী সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য নির্ভরযোগ্য উৎস থেকে তথ্য বা উপাত্ত সংগ্রহ করা জরুরি। এই অভিজ্ঞতাটি এমনভাবে সাজানো হয়েছে যেন একটি দলগত প্রকল্পে সক্রিয় অংশগ্রহণের মাধ্যমে তোমরা নিজেরা বিভিন্ন গুরুত্বপূর্ণ তথ্য সংগ্রহ করে যুক্তিভিত্তিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ করবে। তোমরা জেনে থাকবে যে পরিসংখ্যান (Statistics) হলো জ্ঞান-বিজ্ঞানের ঐ শাখা যা তথ্য বা উপাত্ত সংগ্রহ ও বিশ্লেষণ করে কার্যকরী সিদ্ধান্ত গ্রহণ করতে আমাদের সাহায্য করে। আমরা আশা করি এই অভিজ্ঞতাটিতে সক্রিয় অংশগ্রহণের মাধ্যমে তোমরা পরিসংখ্যানের এই গুরুত্বপূর্ণ দক্ষতাগুলো আয়ত্ত করবে।

দলগত প্রকল্প

এসো প্রকল্পের কাজটি শুরু করা যাক। এই কাজের জন্য প্রথমেই তোমরা দলে ভাগ হয়ে যাবে। এরপর তথ্য সংগ্রহের জন্য নিচের তালিকা থেকে যে কোনো একটি বিষয়বস্তু নির্বাচন করবে।

বিষয়বস্তু :

১। বিদ্যালয়ের ষষ্ঠ থেকে অষ্টম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের উপস্থিতির চিত্র।

২। শ্রেণি ও বয়স অনুযায়ী আমাদের স্বাস্থ্যের বর্তমান হালচাল।

৩। আমাদের পরিবারে কর্মক্ষম লোকসংখ্যার বর্তমান চালচিত্র।

৪। আমাদের বাগানে গাছপালার স্বাভাবিক বৃদ্ধির খুঁটিনাটি।

তোমরা খেয়াল করে দেখবে যে এই তালিকার প্রতিটি বিষয়বস্তু সম্পর্কে তথ্যগুলো যদি সঠিকভাবে জানা যায় তাহলে ঐ বিষয়বস্তু সম্পর্কে সিদ্ধান্ত নেয়া সহজ হয়। যেমন– আমরা যদি কোনো বিদ্যালয়ের শিক্ষা ব্যবস্থার উন্নয়ন সম্পর্কে কোনো সিদ্ধান্ত নিতে চাই, তাহলে শিক্ষার্থীদের উপস্থিতির হার আমাদের জানতে হবে। এসো তাহলে কাজটি সবাই মিলে করি।

উপাত্ত সংগ্রহের নির্দেশনা : তোমাদের সুবিধার জন্য নিচে ছয়টি নমুনা দলের নাম লিখে উপাত্ত সংগ্রহের কাজটি উল্লেখ করা হলো। দলের মধ্যে পরিকল্পনা করে উপাত্তগুলো সংগ্রহ ও সংরক্ষণ করবে। এই কাজটির জন্য সময় ও নির্দেশনা শিক্ষক তোমাদের জানিয়ে দিবেন।

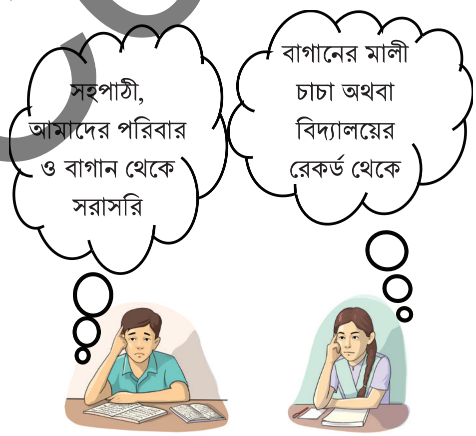
- শাপলা – ষষ্ঠ শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীর গত একমাসের উপস্থিতির উপাত্ত সংগ্রহ করি
- পলাশ – সপ্তম শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীর গত একমাসের উপস্থিতির উপাত্ত সংগ্রহ করি

- টগর — অষ্টম শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীর গত একমাসের উপস্থিতির উপাত্ত সংগ্রহ করি
- গোলাপ — অষ্টম শ্রেণির সকলের উচ্চতা (সেন্টিমিটারে) ও ওজন (কেজিতে) মাপি এবং রেকর্ড সংরক্ষণ করি
- শিউলি — অষ্টম শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীর পরিবারের লোকসংখ্যা ও বয়সের উপাত্ত সংগ্রহ করি
- ডালিয়া — বাগানের গাছগুলোর উচ্চতা (সেমি বা মিটারে) ও পাতার দৈর্ঘ্য (মিলিমিটারে) মাপি এবং রেকর্ড সংরক্ষণ করি

উপাত্ত সংগ্রহের জন্য শিক্ষক যে সময় এবং নির্দেশনা দিয়েছেন তা অনুসরণ করে প্রথমে দলে বসে পরিকল্পনা করবে এবং নিজেদের মধ্যে কাজ ভাগ করে নিবে। তোমাদের দলের তথ্য সংগ্রহের ক্ষেত্রে তুমি যে বিষয়গুলো খেয়াল করেছ তা লিখে রাখো এবং দলের অন্যদের সঙ্গে আলোচনা করো। দলের পরিকল্পনা অন্যদের সামনে উপস্থাপনের সময় অন্যদের মতামত খাতায় লিখে রাখো এবং প্রয়োজনে পরিকল্পনা পরিমার্জন করো।

এবার দলগতভাবে যে তথ্যগুলো তোমরা সংগ্রহ করেছ তার উপর ভিত্তি করে নিচের ছকটি দলের একজনের খাতায় তৈরি করে পূরণ করো। ছকটি পূরণের ক্ষেত্রে দলের সকলের মতামত নাও এবং প্রয়োজনে শিক্ষকের সাহায্য গ্রহণ করো।

তথ্য সংগ্রহের বিষয়	তথ্য সংগ্রহের জন্য সম্ভাব্য উৎসের নাম	উৎসের ধরন	কোন উৎসটি সবচেয়ে নির্ভরযোগ্য মনে করেছ? কেন?



তথ্য/উপাত্ত প্রক্রিয়াকরণ করতে হবে কেন?

তথ্য/উপাত্ত সংগ্রহ করার পরবর্তী কাজ হলো তথ্য প্রক্রিয়াকরণ। কিন্তু তথ্য সংগ্রহ করার পরেই আমরা তথ্য প্রক্রিয়ার কাজ শুরু করতে পারি না। কারণ সংগৃহীত তথ্যকে সাজিয়ে না নিলে সঠিকভাবে তথ্য প্রক্রিয়াকরণ করা সম্ভব হয় না। তোমাদের নিশ্চয়ই মনে আছে, পূর্বের শ্রেণিতে তোমরা উপাত্ত শ্রেণিবদ্ধকরণের কাজ করেছিলে।

দলগত কাজ: প্রত্যেক দল নিজেদের সংগ্রহ করা অবিন্যস্ত উপাত্তগুলো সারণিভুক্ত করে বিন্যস্ত করো।

উপাত্ত শ্রেণিবদ্ধকরণ (Organizing the Data)

আমরা জানি, গুণবাচক নয় এমন সংখ্যাসূচক তথ্যাবলি পরিসংখ্যানের উপাত্ত আর অনুসন্ধানাধীন উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলো বেশিরভাগ সময় অবিন্যস্তভাবে থাকে এবং অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সরাসরি কোনো সিদ্ধান্তে যাওয়া যায় না। প্রয়োজন হয় উপাত্তগুলো বিন্যস্ত ও সারণিভুক্ত করা। উপাত্তসমূহ কীভাবে সারণিভুক্ত করে বিন্যস্ত করতে হয় তা ইতোমধ্যে আমরা শিখেছি। আমরা জানি, কোনো উপাত্ত সারণিভুক্ত করতে হলে–

- প্রথমে তার পরিসর নির্ধারণ করতে হয়
- তারপর উপযুক্ত শ্রেণি ব্যবধান দিয়ে ভাগ করে শ্রেণিসংখ্যা নির্ণয় করা হয়
- উপাত্তের সংখ্যাসূচক তথ্যসমূহ কোনো না কোনো শ্রেণিতে পড়বেই। তাই শ্রেণির বিপরীতে সাংখ্যিক মানের জন্য ট্যালি চিহ্ন ব্যবহার করে গণসংখ্যা নির্ণয় করতে হয়
- যে শ্রেণিতে যতগুলো ট্যালি চিহ্ন পড়বে তত হবে ঐ শ্রেণির গণসংখ্যা, যা ট্যালি চিহ্নের বিপরীতে গণসংখ্যা কলামে লিখতে হয়

মনে করো, তোমাদের বিদ্যালয়ের নবম শ্রেণির শিক্ষার্থীর উপস্থিতির উপাত্ত সংগ্রহ করা হয়েছে। নিচের বক্সে দেওয়া অবিন্যস্ত উপাত্ত উপরের এই ধাপগুলো অনুসরণ করে বিন্যস্ত করা হয়েছে। তোমাদের দলের সংগৃহীত উপাত্তগুলো বিন্যস্ত/শ্রেণিবদ্ধ করার সময় এই ধাপগুলো অনুসরণ করলে কাজটি সহজ হবে।

চলো উপাত্তগুলো বিন্যস্ত ও সারণিভুক্ত করি :

নবম শ্রেণির 100 জন শিক্ষার্থীর গত একমাসের উপস্থিতির সংগ্রহ করা অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ নিম্নরূপ:

18, 14, 8, 16, 9, 15, 13, 14, 15, 9, 17, 8, 15, 8, 10, 10, 11, 14, 16, 11, 10, 11, 18, 10, 11, 10, 12, 12, 13, 18, 12, 13, 12, 10, 12, 13, 12, 13, 11, 12, 13, 14, 11, 14, 15, 14, 15, 14, 14, 10, 14, 15, 14, 19, 15, 14, 17, 15, 14, 13, 15, 14, 16, 15, 15, 14, 15, 12, 17, 10, 16, 15, 12, 17, 15, 14, 10, 16, 9, 17, 13, 12, 16, 13, 11, 16, 12, 18, 13, 19, 15, 15, 19, 13, 12, 12, 14, 19, 14, 15

এখানে উপাত্তের সর্বোচ্চ সংখ্যা 19 এবং সর্বনিম্ন সংখ্যা 8

$\therefore$ পরিসর $= (19 - 8) + 1 = 12$;

তোমরা তো জানো,

শ্রেণিসংখ্যা $= \dfrac{\text{পরিসর}}{\text{শ্রেণিব্যবধান}}$ (পূর্ণসংখ্যায় প্রকাশিত)

ছক-১০.১		
শ্রেণি ব্যাপ্তি	ট্যালি চিহ্ন	গণসংখ্যা
8 – 10	𝍸 𝍷	6
10 – 12	𝍸 𝍸 𝍸 𝍷	16
…………..	…………..	…………
…………	…………..	………..
	মোট	

আমরা যদি শ্রেণি ব্যবধান 2 ধরে নিই,

তাহলে শ্রেণিসংখ্যা হবে $= \frac{12}{2} = 6$

এবার চলো নবম শ্রেণির 100 জন শিক্ষার্থীর গত একমাসের উপস্থিতির অবিন্যস্ত উপাত্তগুলোকে শ্রেণি অনুযায়ী বিন্যস্ত করে ছক ১০.১ এর মতো তৈরি করি। দুইটি করে দেওয়া হলো। বাকি শ্রেণিগুলো তৈরি করে মাথা খাটিয়ে পূরণ করো।

দলগত কাজের আত্মপ্রতিফলন

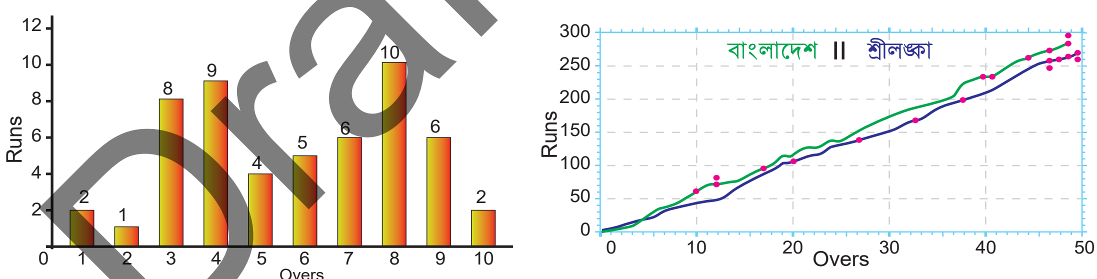
দলগত কাজটির জন্য এ পর্যন্ত যে কাজগুলো করেছ পাশে তার একটি তালিকা দেয়া আছে। কাজগুলোকে ক্রমানুসারে সাজাও। কোন কাজটি করতে তোমরা সবচেয়ে বেশি চ্যালেঞ্জ মোকাবিলা করেছ তা দলের মধ্যে আলোচনা করে লেখো।

উপাত্ত শ্রেণিবদ্ধকরণ → উপাত্ত সংগ্রহ → উপাত্ত বিন্যস্তকরণ → উৎসের নির্ভরযোগ্যতা যাচাই → পরিসর নির্ধারণ → উৎস নির্বাচন → শ্রেণি ব্যবধান নির্ণয়

উপাত্তের উপস্থাপন (Presentation of Data)

দলগত কাজটির এ পর্যায়ে তোমরা সংগৃহীত উপাত্তগুলোকে এমনভাবে উপস্থাপন করবে যাতে করে অন্য দলের সামনে তোমাদের কাজটি প্রদর্শন করার সময় তোমাদের সংগৃহীত উপাত্তের অর্থ তারা খুব সহজে বুঝতে পারে। বিভিন্নভাবে উপাত্ত উপস্থাপন করা যায়।

চিত্র : ১০.১ এর দুইটি চিত্র লক্ষ করো।



(ক চিত্র) (খ চিত্র)

চিত্র: ১০.১

আমরা টেলিভিশন, ম্যাগাজিন, দৈনিক পত্রিকা, বিজ্ঞাপনে অনেকবার এই ধরনের ছবি দেখেছি, তাই না? তোমরা তো জানো, একটি ছবি হাজার শব্দের সমান। হাজার শব্দের প্রতিবেদনে যে কথাটি ফুটিয়ে তোলা যায় না, অনেক সময় একটি ছবিই সেই ভাবনাটি সম্পূর্ণরূপে ফুটিয়ে তোলে। উপরের ছবি দুটিতেও অনেকগুলো তথ্য-উপাত্ত রয়েছে। ছবি দুটিতে কী কী তথ্য-উপাত্ত রয়েছে সহপাঠীর সঙ্গে আলাপ করে নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো।

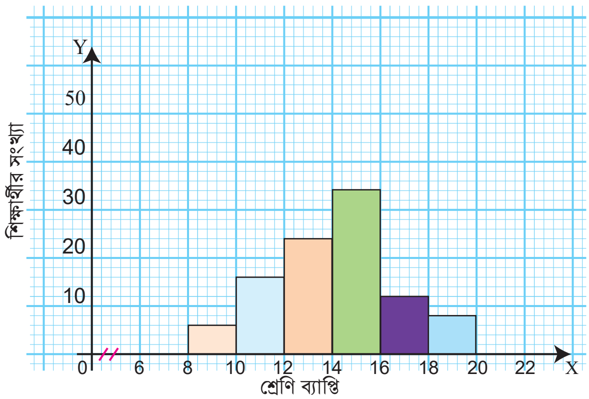
আমরা জেনেছি, সংগৃহীত উপাত্তগুলোকে সারণিভুক্ত করা হলে এদের সম্পর্কে জানা ও সিদ্ধান্ত নেওয়া সহজ হয়। এই সারণিভুক্ত উপাত্তসমূহ যদি লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়, তবে তা বুঝতে, বোঝাতে যেমন সহজ হয় তেমনি আরও চিত্তাকর্ষক হয়। এজন্য অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ সারণিভুক্ত করা ও লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন বহুল প্রচলিত এবং ব্যাপক ব্যবহৃত একটি পদ্ধতি। আগের শ্রেণিগুলোতে স্তম্ভলেখ (bar graph), রেখাচিত্র (line graph), আয়তলেখ (histogram) ও পাইচিত্র (pie chart) সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে এবং এগুলো কীভাবে আঁকা যায় তা দেখানো হয়েছে। এবার গণসংখ্যা বহুভুজ (frequency polygon) ও অজিভ রেখা (cumulative frequency curve) কীভাবে আঁকা হবে তা নিয়ে চলো আমরা আলোচনা করি।

এবার আমরা ছক-১০.২ ব্যবহার করে আয়তলেখ অঙ্কন করার চেষ্টা করব।

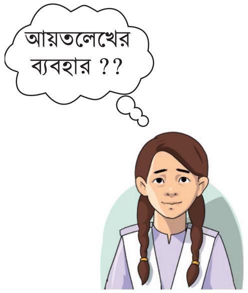
ছক-১০.২						
উপস্থিতির শ্রেণি ব্যাপ্তি	8 – 10	10 – 12	12 – 14	14 – 16	16 – 18	18 – 20
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	6	16	24	34	12	8

প্রথমে x অক্ষ (অনুভূমিক রেখা) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 5টি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান 2 একক নিয়ে সারণির শ্রেণি সীমাগুলোর মানগুলোকে কোনো ফাঁক না রেখে পরপর বসাই। যেহেতু 0 থেকে শুরু না করে 8 থেকে শুরু করা হয়েছে, তাই x অক্ষে বা অনুভূমিক রেখায় পূর্ববর্তী ঘরগুলো আছে বোঝাতে (-/ /-) ছেদ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।

এখন y অক্ষ (উল্লম্ব রেখা) বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 5টি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান 10 একক এবং গণসংখ্যা নিয়ে পাশের ছবির মতো কতকগুলো পরস্পর সংলগ্ন আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করা হলো (চিত্র-১০.২)। যেখানে আয়তক্ষেত্রগুলোর প্রস্থ সারণির শ্রেণি ব্যবধান এবং দৈর্ঘ্য বা উচ্চতা অনুরূপ শ্রেণির গণসংখ্যার সমান। এভাবে অবিচ্ছিন্ন শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তকে লৈখিক উপস্থাপন করে আমরা আয়তলেখ (Histogram) তৈরি করে থাকি।



চিত্র-১০.২



একক কাজ

নিজের ভাষায় তোমার সহপাঠীকে ব্যাখ্যা করো–আয়তলেখ কী? আমরা কোন ধরনের উপাত্তের জন্য আয়তলেখ ব্যবহার করি?

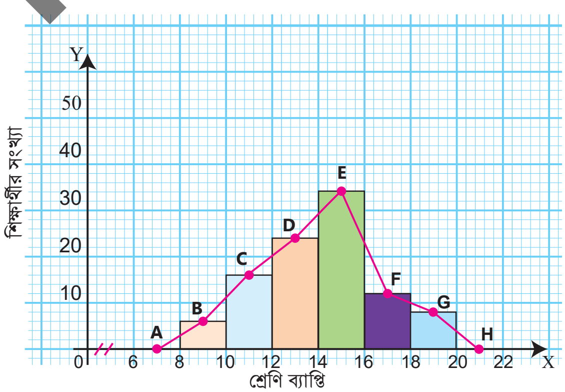
দলগত কাজ: প্রত্যেক দল নিজেদের শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তগুলো ব্যবহার করে আয়তলেখ অঙ্কন করো। -

আয়তলেখ থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ (Frequency Polygon) অঙ্কন

ছক- ১০.৩		
শ্রেণি	শ্রেণির মধ্যবিন্দু	শিক্ষার্থীর সংখ্যা
8 – 10	9	6
10 – 12	11	16
12 – 14	13	24
14 – 16	15	34
16 – 18	17	12
18 – 20	19	8

ছক-১০.৩ থেকে নবম শ্রেণির 100 জন শিক্ষার্থীদের উপস্থিতির উপাত্ত আয়তলেখের আয়তসমূহের ভূমির সমান্তরাল বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুগুলো প্রথমে নির্ণয় করো।

এবার আয়তসমূহের ভূমির সমান্তরাল বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুগুলো B, C, D, E, F ও G দিয়ে চিহ্নিত করো। এক্ষেত্রে প্রতিটি বিন্দুর ভুজ হবে শ্রেণির মধ্যবিন্দু এবং কোটি হবে আয়তসমূহের উচ্চতা। তাহলে, B, C, D,



চিত্র-১০.৩

E, F ও G বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক হবে যথাক্রমে (9, 6), (11, 16), (13, 24), (15, 34), (17,12) এবং (19, 8)। এখন বিন্দুগুলো পরস্পর সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করো। এতে কি বহুভুজটি অঙ্কন সম্পূর্ণ হবে? বহুভুজটির অঙ্কন সম্পূর্ণ করার জন্য x অক্ষের উপর প্রথম শ্রেণিব্যাপ্তির ঠিক আগের শ্রেণিব্যাপ্তির মধ্যবিন্দু A(7, 0) এবং শেষ শ্রেণিব্যাপ্তির ঠিক পরের শ্রেণিব্যাপ্তির মধ্যবিন্দু H(21, 0) চিহ্নিত করো। এবার B বিন্দুর সঙ্গে A এবং G বিন্দুর সঙ্গে H বিন্দু সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করে গণসংখ্যা বহুভুজটির অঙ্কন সম্পূর্ণ করো (চিত্র : ১০.৩)। তাহলে, ABCDEFGH-ই নির্ণেয় বহুভুজ হবে।

সুতরাং কোনো অবিচ্ছিন্ন উপাত্তের শ্রেণিব্যাপ্তির গণসংখ্যা নির্দেশক বিন্দুসমূহকে পর্যায়ক্রমে সরলরেখাংশ দ্বারা যুক্ত করে যে লেখচিত্র পাওয়া যায়, তাই হলো গণসংখ্যা বহুভুজ।

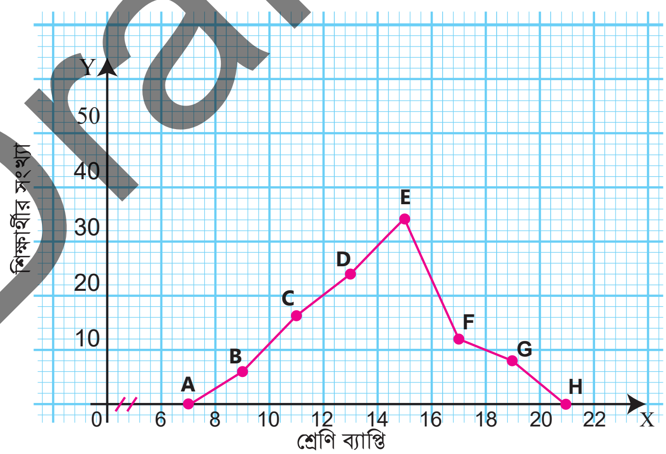
একক কাজ: ক) প্রত্যেক দল নিজেদের শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তগুলো ব্যবহার করে গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করো। এই কাজটি দলের প্রত্যেক সদস্য নিজ নিজ খাতায় করবে।

খ) মাথা খাটিয়ে প্রমাণ করো যে, গণসংখ্যা বহুভুজের ক্ষেত্রফল = আয়তলেখের ক্ষেত্রফল।

আয়তলেখ ছাড়া গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন আয়তলেখ ছাড়াও সম্ভব। তাহলে চলো, শ্রেণি বিন্যস্ত ছক-১০.২ ব্যবহার করে আয়তলেখ ছাড়া গণসংখ্যা বহুভুজ কীভাবে অঙ্কন করা যায় দেখি।

এক্ষেত্রে আয়তলেখ না এঁকে প্রত্যেকটি শ্রেণির মধ্যমানকে ভুজ এবং ঐ শ্রেণির গণসংখ্যাকে কোটি ধরে B(9, 6), C(11, 16), D(13, 24), E(15, 34), F(17, 12) এবং G(19, 8) বিন্দুগুলো ছক কাগজে চিহ্নিত করো।



চিত্র : ১০.৪

তারপর বিন্দুগুলো পরস্পর সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করো। কিন্তু বহুভুজটির অঙ্কন সম্পূর্ণ করার জন্য x অক্ষের উপর প্রথম শ্রেণিব্যাপ্তির ঠিক আগের শ্রেণিব্যাপ্তির মধ্যবিন্দু $A(7, 0)$ এবং শেষ শ্রেণিব্যাপ্তির ঠিক পরের শ্রেণিব্যাপ্তির মধ্যবিন্দু $H(21, 0)$ চিহ্নিত করো। এখন B বিন্দুর সঙ্গে A এবং G বিন্দুর সঙ্গে H সরলরেখাংশ দ্বারা যোগ করে বহুভুজটির অঙ্কন সম্পূর্ণ করো (চিত্র-১০.৪)। তাহলে, ABCDEFGH-ই নির্ণেয় বহুভুজ হবে।

একক কাজ

প্রত্যেক দল নিজেদের শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তগুলো ব্যবহার করে আয়তলেখ ছাড়া গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করো। এই কাজটি দলের প্রত্যেক সদস্য নিজ নিজ খাতায় করবে।

উপাত্ত বিশ্লেষণ

মনে করো তোমরা চার বন্ধু মিলে “নভোথিয়েটার” ঘুরে দেখতে যাবে।

নভোথিয়েটারে আছে নানারকম প্রদর্শনীর ব্যবস্থা এবং সেগুলোর জন্য টিকেট কাটতে হবে। তপুর আছে 80 টাকা, নিতু এনেছে 65 টাকা, হিমুর আছে 70 টাকা আর তোমার 75 টাকা। সব মিলিয়ে $\boxed{}$ টাকা। নভোথিয়েটারে গিয়ে দেখলে 5D চলচ্চিত্র প্রদর্শনীর টিকেট 70 টাকা করে, ভার্চুয়াল রিয়েলিটি গেইম এর টিকেট 75 টাকা করে এবং প্ল্যানেটেরিয়াম প্রদর্শনী 80 টাকা করে। তোমরা চার বন্ধু মিলে সর্বোচ্চ কত

টাকায় কোন প্রদর্শনীটি দেখতে পারবে? কীভাবে হিসাব করলে? অর্থাৎ তোমাদের সব মিলিয়ে যত টাকা হচ্ছে তার মাঝামাঝি সংখ্যা নির্ণয় করলে, যেন সবাই অংশগ্রহণ করতে পার। এই পদ্ধতিটিকে বলা হয় গড় (Average)।

এ তো গেল একটি সহজ উদাহরণ। কিন্তু আরও জটিল প্রশ্ন আসতে পারে– বিজ্ঞান শিক্ষা অর্জনের ক্ষেত্রে বাংলাদেশে ছেলেদের চেয়ে মেয়েরা বেশি এগিয়ে আছে কি? কিংবা বাংলাদেশে ক্রিকেট দলে গত দশ বছরের মধ্যে সেরা খেলোয়াড় কে? অথবা গতমাসে তোমার স্কুলের মাধ্যমিক পর্যায়ে কোন শ্রেণির শিক্ষার্থীদের উপস্থিতির হার সবচেয়ে বেশি ছিল? এই প্রশ্নগুলোর উত্তর যদি আমরা দিতে চাই তাহলে পরিসংখ্যানের যে বিষয়টি আমাদের সবচেয়ে বেশি সাহায্য করে তাহলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা– যার মাধ্যমে উপাত্তের সাধারণ বৈশিষ্ট্যগুলো শনাক্ত করা যায়।

কেন্দ্রীয় প্রবণতা (Central Tendency)

নিতুর স্কুলের পাশে দুটি চায়ের দোকানে খুব ভালো মানের চা পাওয়া যায়। একটি মন্টু মামার এবং অন্যটি বিন্দু মাসীর।

নিতু স্কুলে আসা-যাওয়ার সময় লক্ষ করে দিনের প্রায় সকল সময়ে ঐ দুটি দোকানে খরিদ্দারের ভিড় লেগেই থাকে। কিন্তু কোন দোকানে বেশি লাভ হয়, নিতু তা বুঝতে পারছে না। সেজন্য নিতু ঐ দুটি চা এর দোকানের প্রত্যেকটির গতমাসের প্রতিদিন কত টাকা লাভ হয়েছে সে উপাত্তগুলো সংগ্রহ করে। নিচের বক্সে নিতুর সংগৃহীত উপাত্ত দেওয়া আছে।

গতমাসে মন্টু মামার দোকানের প্রতিদিনের লাভ (টাকায়):

560, 615, 830, 670, 720, 920, 775, 920, 775, 720, 560, 615, 670, 920, 830, 775, 720, 775, 720, 775, 615, 670, 615, 720, 830, 720, 670,720, 830, 670

গতমাসে বিন্দু মাসীর দোকানের প্রতিদিনের লাভ (টাকায়):

555, 730, 555, 780, 620, 825, 620, 730, 875, 620, 780, 660, 825, 660, 730, 780, 730, 730, 620, 730, 780, 660, 780, 825, 660, 825, 875, 660, 875, 730

ভেবে দেখো তো, প্রদত্ত উপাত্তগুলো থেকে গতমাসে কোন দোকানে কত বেশি লাভ হয়েছে নিতু কি তা বলতে পারবে? সে দুটি দোকানের পাওয়া উপাত্তের তুলনা কীভাবে করবে?

আমরা প্রতিটি উপাত্তের জন্য এমন কোনো কোনো বিশেষ সংখ্যা নির্ণয় করতে পারি যা সম্পূর্ণ উপাত্তের প্রতিনিধিত্ব করবে। এই বিশেষ সংখ্যাগুলো সাধারণত উপাত্তের কেন্দ্রীয় অবস্থানের কাছাকাছি থাকে। অর্থাৎ অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে, উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জীভূত হয়। নিচের বক্সের একক কাজটি করে দেখো।

একক কাজ

ক) মন্টু মামার দোকান থেকে প্রাপ্ত উপাত্তগুলো মানের উর্ধ্বক্রমানুসারে সাজাও।

খ) বিন্দু মাসীর দোকান থেকে প্রাপ্ত উপাত্তগুলো মানের অধঃক্রম অনুসারে সাজাও।

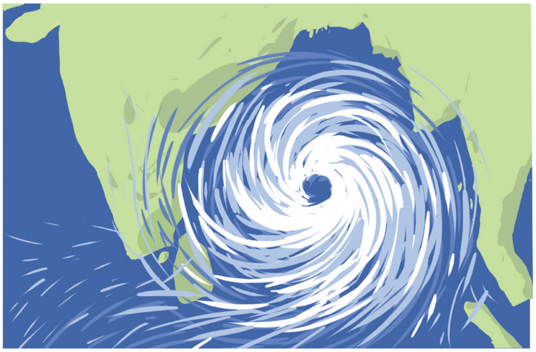
গ) নিজেদের সংগ্রহ করা উপাত্তগুলো মানের ক্রমানুসারে সাজাও।

বিন্যস্ত করার পর এমন কোনো মান কি দেখতে পাচ্ছ যা সবচেয়ে বেশি সংখ্যকবার পাওয়া গেছে? তাহলে ঐ মান বা মানগুলো লিখে রাখো।

ক) ________

খ) ________

গ) ________



সাইক্লোনের সময় বাতাসের গতিবেগ

কোনো দেশের রাজধানীর জনসংখ্যার ঘনত্ব

চিত্র : ১০.৫

চিত্র -১০.৫ দেখে তোমরা কি কিছু ধারণা করতে পারছ? সহপাঠীর সঙ্গে আলাপ করো। তোমাদের ভাবনাটা সংক্ষেপে লিখে শিক্ষককে দেখাও।

আমরা যদি অবিন্যস্ত উপাত্তগুলোকে একটি গণসংখ্যা নিবেশন সারণিতে উপস্থাপন করি, তাহলেও দেখা যাবে মাঝামাঝি কোনো একটি শ্রেণিতে সবচেয়ে বেশি সংখ্যক গণসংখ্যা রয়েছে। মূলত সংখ্যাগুলোর কাছাকাছি অবস্থানই হলো কেন্দ্রীয় অবস্থান। সুতরাং আমরা বলতে পারি, উপাত্তসমূহের কেন্দ্রীয় মানের দিকে পুঞ্জীভূত হওয়ার প্রবণতাই হলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা। কেন্দ্রীয় মান একটি সংখ্যা এবং এই সংখ্যা উপাত্তসমূহের প্রতিনিধিত্ব করে। এই সংখ্যা দ্বারা কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করা হয়। কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ হলো : ১) গাণিতিক গড় বা গড় (arithmetic average or mean) (২) মধ্যক (median) (৩) প্রচুরক (mode)।

তোমরা দলগতভাবে যে উপাত্ত সংগ্রহ করেছ অধ্যায়টির এই অংশে ঐ উপাত্তসমূহকে বিশ্লেষণ করে কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করবে। এরপর সংগৃহীত উপাত্তের সাধারণ কিছু বৈশিষ্ট্য শনাক্ত করার জন্য সিদ্ধান্ত গ্রহণ করবে। এক্ষেত্রে কেন্দ্রীয় প্রবণতার যে তিনটি পরিমাপক (গড়, মধ্যক ও প্রচুরক) আছে, সে সম্পর্কে ধারণা লাভ করবে।

কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ আমাদের কি কাজে লাগে?

মনে করো, তোমরা শিক্ষার্থীদের মাসিক উপস্থিতি সম্পর্কে উপাত্ত সংগ্রহ করলে। যদি ঐ উপাত্তসমুহের কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করতে পার তাহলে খুব সহজেই বলতে পারবে "মাসের কোন দিনগুলোতে শিক্ষার্থীর উপস্থিতি সবচেয়ে কম বা বেশি ছিল" কিংবা "বেশিরভাগ দিন কত সংখ্যক শিক্ষার্থী সাধারণত উপস্থিত থাকে"। অর্থাৎ, একটি নির্দিষ্ট ঘটনা সম্পর্কে উপাত্ত সংগ্রহ করার পর যদি ঐ উপাত্তসমূহের কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপগুলো নির্ণয় করতে পারি তাহলে আমরা খুব সহজেই ঐ উপাত্তের তথা ঐ নির্দিষ্ট ঘটনার সাধারণ বৈশিষ্ট্য বর্ণনা করতে পারব।

- ☐ গড়, মধ্যক ও প্রচুরক কখন/কোন পরিস্থিতিতে ব্যবহার করতে হয়?
- ☐ গড়, মধ্যক ও প্রচুরক থেকে আমরা কী ধরনের তথ্য পাই এবং এর মাধ্যমে উপাত্তকে কীভাবে ব্যাখ্যা করা যায়?
- ☐ অবিন্যস্ত (raw data) ও বিন্যস্ত (data in frequency table) উপাত্ত থেকে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক গণনা/পরিমাপ করার প্রক্রিয়া কী?

এই অংশের কাজগুলো করার সময় তোমরা যে বিষয়গুলো গুরুত্বের সঙ্গে বিবেচনা করবে তা পাশের বক্সে দেওয়া আছে।

গাণিতিক গড় বা গড় (Arithmetic Average or Mean)

তোমরা ষষ্ঠ শ্রেণিতে শিখেছ, উপাত্তসমূহের মানের সমষ্টিকে যদি তার সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে উপাত্তসমূহের গড় মান পাওয়া যায়। মনে করো মন্টু মামার দোকান থেকে নিতুর পাওয়া ৩০ দিনের উপাত্ত (লাভ) যথাক্রমে $x_1 = 560, x_2 = 615, x_3 = 830, \ldots, x_{30} = 670$

এখন x চলকের n সংখ্যক বিভিন্ন মান $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ এবং উপাত্তগুলোর গড় $\overline{x}$ (পড়তে হবে x বার) হলে,

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

এখানে, Σ চিহ্নটি হলো গ্রিক বর্ণ এবং বলা হয় (Capital Sigma), যার অর্থ সমষ্টি।

তাহলে, গতমাসে মন্টু মামার মোট লাভ হয়

$= x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{30}$

$= (560 + 615 + 830 + \ldots + 670)$ টাকা

$= 21925$ টাকা।

$\therefore$ মন্টু মামার দোকানে গতমাসের গড় লাভ

$= \frac{21925}{30} = 730.83$ টাকা (প্রায়)।

(প্রয়োজনে ক্যালকুলেটর ব্যবহার করা যেতে পারে।)

এই পদ্ধতিতে পাওয়া গড়কে আমরা গাণিতিক গড় বা গড় বলে থাকি।

আচ্ছা, সংখ্যাগুলো যদি অনেক বড়ো হয় সেক্ষেত্রে উপরের পদ্ধতিতে গড় বের করা অনেক কষ্টের, তাই না? একটু কম কষ্ট করে সহজেই বড়ো বড়ো অনেকগুলো সংখ্যার গড় নির্ণয় করা গেলে কেমন হয়। তাহলে চলো, বিন্দু মাসীর দোকান থেকে নিতুর পাওয়া উপাত্তগুলোকে ছক: ১০.৪ এর মাধ্যমে বিন্যস্ত করে দেখি তিনি গতমাসে গড়ে কত টাকা লাভ করেছেন।

ছক- ১০.৪

লাভের পরিমাণ (টাকা) (x_i)	দিনসংখ্যা (f_i)	$f_i x_i$
555	2	1110
620	4	2480
660	5	3300
730	7	5110

780	5	3900
825	4	3300
875	3	2625
মোট	n = 30	$\sum f_i x_i = 21825$

∴ গতমাসে বিন্দু মাসীর চা এর দোকান থেকে গড় লাভ হয়েছে = $\frac{1}{n}\sum f_i x_i = \frac{1}{30}$ x 21825 = 727.50 টাকা।

তাহলে দেখা যাচ্ছে, নিতুর পাওয়া তথ্য অনুসারে গতমাসে মন্টু মামার দোকানে গড় লাভ বেশি ছিল।

আমরা দুটি পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করে দেখলাম। যদিও এই পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা সহজ কিন্তু উপাত্তের সংখ্যা অনেক বেশি হলে, এভাবে গড় নির্ণয় করা একদিকে যেমন সময়সাপেক্ষ, অন্যদিকে ভুল হওয়ার সম্ভাবনা থাকে। তাই উপাত্তের সংখ্যা বেশি হলে উপাত্তসমূহ শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করে গড় নির্ণয় করা অধিক শ্রেয়।

তাহলে চলো, বিন্দু মাসীর দোকান থেকে নিতুর পাওয়া উপাত্তগুলোকে শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করে গড় নির্ণয় করার চেষ্টা করি :

নিতুর পাওয়া উপাত্তগুলোর মধ্যে সবচেয়ে ছোটো সংখ্যা 555 এবং সবচেয়ে বড়ো সংখ্যা 875। এক্ষেত্রে উপাত্তের পরিসর কত হবে পাশের ঘরে পরিসর = (______ - ______) + 1 = ________ লেখো।

এখন শ্রেণি ব্যবধান 50 নিলে শ্রেণি সংখ্যা হবে = (________ ÷ 50) = 6.42 বা ______ ।

ভেবে দেখো তো, উপাত্তগুলোকে শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করা হলে প্রতিটি শ্রেণির কেন্দ্রীয় মান কীভাবে পাওয়া যাবে?

ধরে নেওয়া হয় যে, শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ উপাত্তের প্রতিটি শ্রেণির গণসংখ্যাগুলোর বেশিরভাগ ঐ শ্রেণির মধ্যমানের কাছাকাছি কেন্দ্রীভূত হয়ে থাকে। তাই প্রতিটি শ্রেণির শ্রেণি মধ্যমানকেই ঐ শ্রেণির প্রতিনিধি বিবেচনা করা হয়। অর্থাৎ

কোনো একটি শ্রেণি লিখে শ্রেণিটির উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা লেখো।

শ্রেণি: ____________________

উচ্চসীমা = ________, নিম্নসীমা = ________

$$\text{শ্রেণি মধ্যমান} = \frac{\text{শ্রেণির নিম্নসীমা} + \text{শ্রেণির উচ্চসীমা}}{2}$$

এবার চলো ছক ১০.৫ তৈরি করে ফেলি :

ছক- ১০.৫				
লাভের পরিমাণ (টাকা)	ট্যালি চিহ্ন	দিনসংখ্যা (f_i)	শ্রেণির মধ্যমান (x_i)	$f_i x_i$
550 – 600	||	2	575	1150
601 – 650	||||	4	625	2500
651 – 700	~~||||~~	5	675	3375
701 – 750	~~||||~~ ||	7	725	5075
751 – 800	~~||||~~	5	775	3875
801 – 850	||||	4	825	3300
851 – 900	|||	3	875	2625
		$n = 30$		$\sum f_i x_i = 21900$

$\therefore$ গতমাসে লাভের গাণিতিক গড় $= = \frac{1}{n}\sum f_i x_i = \frac{1}{30}$ x 21900 = 730 টাকা।

গাণিতিক গড় নির্ণয়ের এই নতুন পদ্ধতিকে প্রত্যক্ষ পদ্ধতি (Direct Method) বলা হয়।

দলগত কাজ:

ক) প্রত্যেক দল নিজেদের শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তগুলো ব্যবহার করে প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করো।

খ) গোলাপ দলের সদস্যরা কি মনে করে বয়স অনুসারে সহপাঠীদের গড় উচ্চতা যথার্থ? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি উপস্থাপন করো। প্রয়োজনে ছেলে ও মেয়েদের বয়সের সঙ্গে আদর্শ উচ্চতার আলাদা আলাদা তথ্য-উপাত্ত ব্যবহার করতে পারবে।

গ) বিদ্যালয়ের বাগানের গাছগুলোর উচ্চতার গড় থেকে ডালিয়া দলের সদস্যরা কি মনে করে গাছগুলোর বৃদ্ধি স্বাভাবিক? অন্য দলের সামনে তোমাদের যুক্তি উপস্থাপন করো।

ঘ) ছক ১০.৪ ও ১০.৫ এর ক্ষেত্রে ক্যালকুলেটর ব্যবহার তোমাদের কীভাবে সাহায্য করেছে লেখো।

লক্ষ করো, বিন্দু মাসীর দোকানের লাভের অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে গড় লাভ পেয়েছিলে 727.50 টাকা এবং বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে গড় লাভ পেয়েছ 730 টাকা। কিন্তু প্রশ্ন হলো এমন আলাদা মান কেন পেলাম এবং এদের কোনটি ঠিক? অবিন্যস্ত উপাত্তের ক্ষেত্রে আমরা জানি ঠিক কোন উপাত্ত কতবার করে আছে। যেমন– ছক-১০.৪ -এ 555 আছে 2 বার। কিন্তু বিন্যস্ত উপাত্তে আমরা শুধু এটুকু জানি যে একটি শ্রেণিতে ঠিক কতগুলো উপাত্ত

আছে। যেমন– ছক-১০.৫-এ $(550 - 600)$ শ্রেণিতে উপাত্ত আছে 2টি। কিন্তু বিন্যস্ত করার ফলে আর জানার সুযোগ থাকে না যে এই ২টি উপাত্তের মান কী কী? এজন্য আমরা $(550 - 600)$ এর শ্রেণি মধ্যমানকে (575) ঐ শ্রেণির প্রতিনিধি নিয়েছি। তারমানে আমরা ধরে নিচ্ছি $(550 - 600)$ শ্রেণিতে থাকা 2টি উপাত্তের মানই হচ্ছে 575। তাই সত্যি বলতে এই গড় আসলে অবিন্যস্ত উপাত্তেরই গড়। কিন্তু বিন্যস্ত উপাত্তের প্রতিনিধিত্বকারী উপাত্ত (শ্রেণির মধ্যমানগুলো) এবং সঠিক উপাত্ত (অবিন্যস্ত উপাত্ত) সবসময় এক নয়। আর উপাত্তই যদি বদলে যায় তাহলে কী সঠিক গড় পাওয়া সম্ভব? তোমরাই ভেবে দেখো।

আমরা প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে গাণিতিক গড় নির্ণয় করা জানলাম। তোমরা মনে হয় ভাবছ, যদি আরও একটু সহজ পদ্ধতিতে গড়টি নির্ণয় করা যেতো তাহলে ভালো হতো। তাই না? কেননা তোমাদের কাছে হয়তো মনে হচ্ছে, x_i এবং f_i অনেক বড়ো হলে $f_i x_i$ নির্ণয় ও এদের যোগফল হিসাব করা জটিল এবং সময়সাপেক্ষ হবে। এমনকি ভুল হওয়ারও সম্ভাবনা থাকতে পারে। তাহলে চলো আরও একটি পদ্ধতিতে গাণিতিক গড় নির্ণয়ের চেষ্টা করি।

যদি ভালোভাবে খেয়াল করো, দেখবে ছক-১০.৪ ও ছক-১০.৫ উভয়টিতেই f_i এর কোনো পরিবর্তন হয়নি। অর্থাৎ, f_i একই আছে। আমরা ইতোমধ্যেই জেনেছি, গড় এই x_i গুলোর কেন্দ্রীয় মান হবে। সেক্ষেত্রে x_i গুলোর মাঝামাঝি কোনো একটি x_i কে অনুমিত গড় (Assumed Mean) হিসেবে ধরে নিতে পারি। আর এই অনুমিত গড়কে সাধারণত (a) প্রতীক দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। অবিন্যস্ত উপাত্তগুলোকে শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করা হলে প্রতিটি শ্রেণির শ্রেণি ব্যবধান (h) সাধারণত সমান থাকে। সেক্ষেত্রে প্রতিটি শ্রেণির ধাপ বিচ্যুতি $\left(u_i = \dfrac{x_i - a}{h}\right)$ নির্ণয় করে তুলনামূলকভাবে সহজে এবং কম সময়ে গাণিতিক গড় নির্ণয় করা যায়। তাছাড়া $f_i u_i$ এর মান ও সমষ্টি বের করাও অনেক সহজ।

> গাণিতিক গড় নির্ণয় করার এই পদ্ধতিকে অনুমিত গড় পদ্ধতি (Assumed Mean Method) বা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি (Short Method) বা বিচ্যুতি পদ্ধতি (Deviation Method) বলা হয়ে থাকে।

অনুমিত গড় পদ্ধতি বা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি বা বিচ্যুতি পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় :

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ের জন্য পাশের সূত্রটি ব্যবহার করতে পারি।	**গাণিতিক গড়** $(\bar{x}) = a + \dfrac{\sum f_i u_i}{n} \times h$

কারণ, প্রতিটি শ্রেণির অনুমিত গড় ও প্রতিটি উপাত্তের পার্থক্যই হলো ধাপ বিচ্যুতি (Deviation)। এই বিচ্যুতি বা পার্থক্যের গড়ই হচ্ছে অনুমিত গড় আর প্রকৃত গড়ের পার্থক্য। তারমানে অনুমিত গড়ের সঙ্গে এই বিচ্যুতি বা পার্থক্যের গড় $\left(\dfrac{\sum f_i u_i}{n} \times h\right)$ যোগ করলেই আমরা পেয়ে যাব গড়ের প্রকৃত বা সঠিক মান।

যেখানে, $\bar{x}$ = গাণিতিক গড়, a = অনুমিত গড়, n = মোট গণসংখ্যা, h = শ্রেণি ব্যবধান এবং $\sum f_i u_i$ = ধাপ বিচ্যুতিকে সংশ্লিষ্ট শ্রেণির গণসংখ্যা দ্বারা গুণফলগুলোর সমষ্টি

এবার চলো ছক- ১০.৬ ব্যবহার করে সংক্ষিপ্ত বা বিচ্যুতি পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করি:

ছক- ১০.৬

লাভের পরিমাণ (টাকা)	দিন সংখ্যা f_i	শ্রেণির মধ্যমান x_i	ধাপ বিচ্যুতি $(u_i) = \frac{x_i - a}{h}$	$f_i u_i$
550 – 600	2	575	– 3	– 6
601 – 650	4	625	– 2	– 8
651 – 700	5	675	– 1	–5
701 – 750	7	$725 = (a)$	0	0
751 – 800	5	775	1	5
801 – 850	4	825	2	8
851 – 900	3	875	3	9
	$n = 30$			$\sum f_i u_i = 3$

এখানে, অনুমিত গড় $a = 725$, মোট গণসংখ্যা $n = 30$, শ্রেণি ব্যবধান $h = 50$ এবং $\sum f_i u_i = 3$

$\therefore$ গাণিতিক গড় $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{n} \times h = 725 + \frac{3}{30} \times 50 = 725 + 5 = 730$

$\therefore$ লাভের গাণিতিক গড় 730 টাকা।

সুতরাং আমরা দেখতে পেলাম, বিন্দু মাসীর দোকানের লাভের অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে প্রত্যক্ষ ও সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে প্রাপ্ত গড় লাভের মান একই। তাহলে বলা যায়, শ্রেণির দৈর্ঘ্য বা শ্রেণি ব্যবধান সমান থাকলে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় অধিকতর নির্ভরযোগ্য।

দলগত কাজ:

- প্রত্যেক দল নিজেদের শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তগুলো ব্যবহার করে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করো।
- কোন পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা সহজ ও বেশি নির্ভরযোগ্য ব্যাখ্যা করে নিজ নিজ খাতায় লেখো ।

এই পর্যন্ত তোমার দলের কাজের অগ্রগতি সম্পর্কে তোমার মতামত এখানে লিখে রাখো।

মধ্যক (Median)

ধরো, কোনো এক অফিসের চারজন কর্মচারীর মাসিক বেতন যথাক্রমে 15000, 16000, 17000 ও 18000 টাকা। তোমরা ইতোমধ্যেই গড় নির্ণয় করা শিখেছ। হিসেব করে দেখো তো এই চারজন কর্মচারীর মাসিক বেতন গড়ে কত টাকা? হিসেবটি নিচের খালি ঘরে করো:

কিন্তু যিনি ঐ অফিসের প্রধান, তার মাসিক বেতন 75000 টাকা। এখন তাকে নিয়ে মোট পাঁচ জনের মাসিক গড় বেতন হিসেব করো। কত টাকা পেয়েছ?

তোমরা এরই মধ্যে জেনেছ, গড় মান এমন একটি সংখ্যা যা উপাত্তসমূহের প্রতিনিধিত্ব করে। তাহলে তোমাদের পাওয়া গড় মানটি কি সকল উপাত্তের কেন্দ্রীয় মান? অথবা উপাত্তগুলোকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে সংখ্যাটি কেন্দ্রীয় অবস্থানের কাছাকাছি হয়? যদি না হয়, সেক্ষেত্রে এর কারণ খুঁজতে হবে। কারণটি হলো প্রদত্ত উপাত্তের মধ্যে দু'একটি যদি অন্যান্য মানগুলোর তুলনায় অনেক বড়ো বা অনেক ছোটো হয়, তখন উপাত্তসমূহের গড় মান তাদের কেন্দ্রীয় মানের কাছাকাছি থাকে না। অর্থাৎ উপাত্তে গড় এক্ষেত্রে ভালো ফল দিতে পারে না। এই ধরনের পরিস্থিতিতে উপাত্তের গড় মানের চেয়ে মধ্যক (median) অনেক বেশি কার্যকরী হতে পারে।

কিন্তু মধ্যক কী?

মধ্যক হলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের আরও একটি মাপক। ষষ্ঠ শ্রেণিতে মধ্যক সম্পর্কে কিছুটা ধারণা দেওয়া হয়েছে। তোমরা জেনেছ, অবিন্যস্ত উপাত্তগুলোকে তাদের মানের ক্রমানুসারে সাজানো হলে, মধ্যক উপাত্তগুলোকে সমান দুইভাগে বিভক্ত করে।

অফিসের পাঁচ জনের মাসিক বেতন হতে প্রাপ্ত টাকার সংখ্যাগুলো মানের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজানোর পর যে মানটি উপাত্তগুলোকে সমান দুইভাগে ভাগ করে ঐ মানটিকে বক্স করে চিহ্নিত করো :

উপাত্তগুলোকে মানের অধঃক্রম অনুসারে সাজানো পর মধ্যম মানটির কোনো পরিবর্তন হয় কি না যাচাই করো:

অফিসের প্রধানসহ মোট 5 জন ছিল। তাই তুমি 5টি উপাত্ত পেয়েছিলে। উপাত্তগুলোকে মানের ক্রমানুসারে সাজানোর পর ঠিক মাঝখানে একটি সংখ্যাই পেয়েছ এবং ঐটিই ছিল মধ্যক। কিন্তু তাদের সঙ্গে যদি আরও একজন কর্মচারি অংশগ্রহণ করত এবং যদি তার মাসিক বেতন 20000 টাকা হতো, তখন উপাত্তের সংখ্যা হতো মোট 6টি। সেক্ষেত্রে উপাত্তগুলোকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে মাঝামাঝি স্থানে কটি উপাত্ত পাওয়া যেত এবং সেক্ষেত্রে উপাত্তগুলোর মধ্যক কী হতো? তোমার ভাবনা ও হিসাবটি নিচের খালি ঘরে লেখো।

তুমি যদি মাঝামাঝি স্থানে দুটি সংখ্যা পেয়ে থাকো, তবে মধ্যক হবে ঐ সংখ্যা দুটির গড় মান। তাহলে আমরা বলতে পারি, অবিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা n হলে এবং n যদি বিজোড় সংখ্যা হয়, সেক্ষেত্রে মধ্যক হবে $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম পদ। কিন্তু n জোড় সংখ্যা হলে মধ্যক হবে $\left(\frac{n}{2}\right)$ তম ও $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পদ দুইটির সাংখ্যিক মানের গড়।

দলগত কাজ

প্রত্যেক দল নিজেদের সংগ্রহ করা উপাত্তগুলোর মধ্যক নির্ণয় করো। নির্ণয় করা গড় ও মধ্যকের মধ্যে কোনটি অধিক কার্যকরী এবং কেন যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করো।

তোমাদের সংগৃহীত উপাত্তের ক্ষেত্রে গড় ও মধ্যক কীভাবে কাজে লাগবে লিখে রাখো।

ক্রমযোজিত গণসংখ্যা (Cumulative Frequency)

নিতু ও সজল স্কুলের 100 জন বন্ধুর সপ্তাহের যাতায়াত খরচের তথ্য সংগ্রহ করেছে। তারা জানতে চায় কতজন বন্ধুর সাপ্তাহিক যাতায়াত খরচ 90 টাকার কম এবং কতজন বন্ধুর 70 থেকে 100 টাকার মধ্যে। কাজটি করার জন্য সংগ্রহ করা অবিন্যস্ত উপাত্তগুলোকে প্রথমে তালিকাবদ্ধ করেছে। তালিকাটি হলো :

সাপ্তাহিক যাতায়াত খরচ (টাকা)	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100	100 – 110
বন্ধুদের সংখ্যা	12	13	20	23	19	13

তারা প্রথম শ্রেণির গণসংখ্যা 12 এর সঙ্গে দ্বিতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা 13 যোগ করে পায় 25। এই 25 হবে দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। আর প্রথম শ্রেণি দিয়ে শুরু হওয়ায় এই শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা 12ই থাকবে। আবার দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যার সঙ্গে তৃতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা যোগ করলে $(25 + 20) = 45$ পাওয়া যাবে। এটি হবে তৃতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। এভাবে দুজনে মিলে ছক- ১০.৭ এর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি এর কয়েকটি শ্রেণি পূরণ করেছে। অবশিষ্ট শ্রেণিগুলো পূরণ করা তোমার দায়িত্ব। কী, পারবে না?

ছক-১০.৭

সাপ্তাহিক যাতায়াত খরচ (টাকা)	বন্ধুদের সংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা		সাপ্তাহিক যাতায়াত খরচ (টাকা)	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
50 – 60	12	12		60 এর কম	12
60 – 70	13	12 + 13 = 25		70 এর কম	25
70 – 80	20	25 + 20 = 45	→	80 এর কম	45
80 – 90	23			90 এর কম	
90 – 100	19			100 এর কম	
100 – 110	13			110 এর কম	

কতজন বন্ধুর সাপ্তাহিক যাতায়াত খরচ 90 টাকার কম এবং কতজন বন্ধুর 70 থেকে 100 টাকার মধ্যে তা নিতু ও সজল সহজেই ছক-১০.৭ থেকে জানতে পারল। নিতু ও সজলের মতো মাথা খাটিয়ে ফাঁকা ঘরে বন্ধুর সংখ্যা লেখ।

ক)		জন বন্ধুর সাপ্তাহিক যাতায়াত খরচ 90 টাকার কম
খ)		জন বন্ধুর সাপ্তাহিক যাতায়াত খরচ 70 থেকে 100 টাকার মধ্যে

দলগত কাজ :

প্রত্যেক দল নিজেদের সংগ্রহ করা উপাত্তের শ্রেণি বিন্যস্ত গণসংখ্যা সারণি থেকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করো। কাজ সম্পন্ন করে পোর্টফলিওতে জমা রাখো।

মধ্যক নির্ণয়ে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার প্রয়োজন কেন?

নিতুর ক্লাসের 51 জন শিক্ষার্থী প্রত্যেকে নিজেদের উচ্চতা মেপে পাশের ছকটি তৈরি করেছে। আমরা শিক্ষার্থীদের উচ্চতার মধ্যক নির্ণয় করতে চাই।

উচ্চতা (সেমি.)	150	155	160	165	170	175
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	4	6	12	16	8	5

নিতুর ক্লাসের শিক্ষার্থীর সংখ্যা $n = 51$, যা বিজোড় সংখ্যা। সুতরাং শিক্ষার্থীদের উচ্চতার মধ্যক হবে $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম পদের মান অর্থাৎ $\left(\frac{51+1}{2}\right)$ তম বা 26তম পদের মান। কিন্তু 26তম পদের মান কত বা এই পদটি কোথায় আছে তা জানার জন্য আমাদের শিক্ষার্থীদের ক্রমযোজিত সংখ্যা জানতে হবে। তাহলে চলো প্রথমে শিক্ষার্থীদের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করি (ছক-১০.৮) :

ছক- ১০.৮

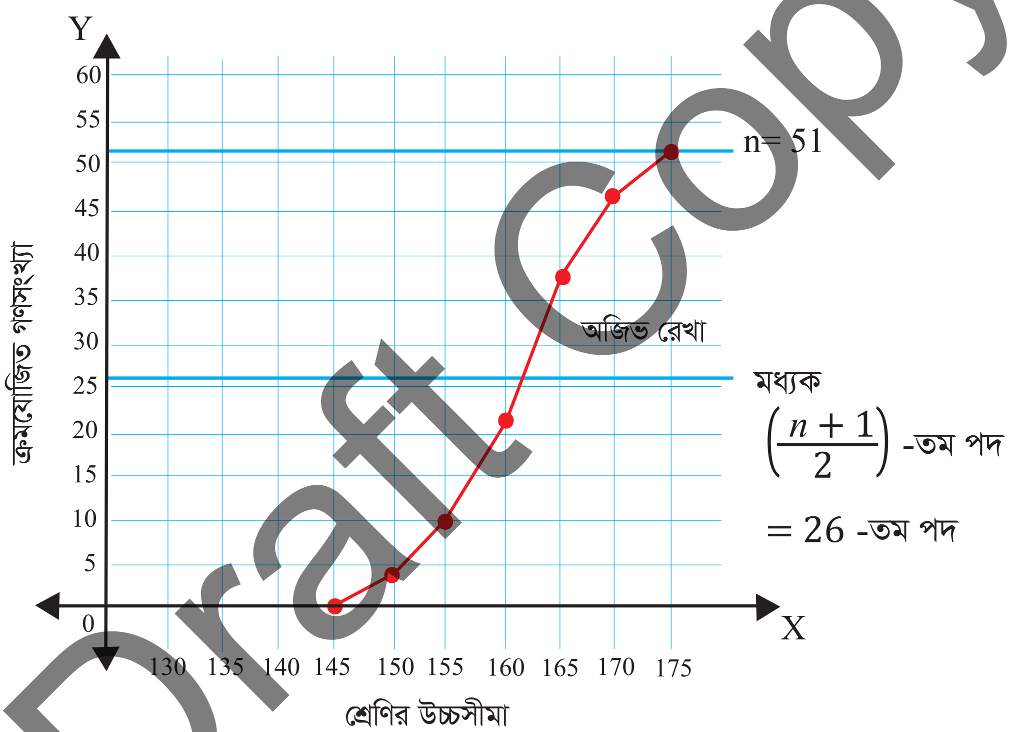
উচ্চতা (সেমি.)	150	155	160	165	170	175
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	4	6	12	16	8	5
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	4	10	22	38	46	51

ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি থেকে দেখা যাচ্ছে, 23তম থেকে 38তম পর্যন্ত সকল পদের মানই 165। আমাদের প্রয়োজন 26তম পদের মান।

$\therefore$ 26তম পদের মান $= 165$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যক 165 সেমি।

এখানে ক্রমযোজিত সংখ্যা ছক-১০৮ কে আমরা ছক কাগজে উপস্থাপন করে দেখি মধ্যকের মানের সিদ্ধান্ত নেওয়ার কাজটা আরেকটু সহজ করা যায় কি না।



চিত্র- ১০.৬

ছক কাগজের উভয় অক্ষের একটি নির্দিষ্ট স্কেল ধরে প্রতিটি শ্রেণির উচ্চসীমাকে অনুভূমিক রেখা অর্থাৎ x-অক্ষ বরাবর এবং ক্রমযোজিত গণসংখ্যাকে উলম্ব রেখা বা y-অক্ষ বরাবর বসাই। উভয় অক্ষের মাপের স্কেল প্রয়োজনে আলাদাও নেওয়া যেতে পারে। এখন ক্রমযোজিত গণসংখ্যা ছক-১০.৮ থেকে (150, 4), (155, 10), (160, 22), (165, 38), (170, 46)) ও (175, 51) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। বিন্দুগুলো পর্যায়ক্রমে স্কেল ছাড়া খালি হাতে যুক্ত করি। ফলে একটি বক্ররেখা পাওয়া গেল (চিত্র : ১০.৬)। এই বক্ররেখাটিই ক্রমযোজিত গণসংখ্যা লেখচিত্র বা অজিভ রেখা। এবার অজিভ রেখা থেকে দেখে

আরও সহজেই $n = 51$ এর জন্য $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম $= 26$ তম পদের মান $= 165$ জেনে মধ্যক নির্ণয় করা যায়।

একক কাজ :

প্রত্যেক দল নিজেদের শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তগুলো ব্যবহার করে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি এবং ক্রমযোজিত গণসংখ্যা লেখচিত্র বা অজিভ রেখা থেকে মধ্যক নির্ণয় করো। অজিভ রেখা আঁকার ফলে মধ্যক নির্ণয় কাজটি সহজ হয়েছে কি না যুক্তি দাও। এই কাজটি দলের প্রত্যেক সদস্য নিজ নিজ খাতায় করবে।

অজিভ রেখা ব্যবহার করে শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক নির্ণয়:

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা n হলে, $\left(\frac{n}{2}\right)$ তম পদের মান হচ্ছে মধ্যক। আর $\left(\frac{n}{2}\right)$ তম পদটি নিশ্চয়ই কোনো একটি শ্রেণিতে থাকবে। যে শ্রেণিতে $\left(\frac{n}{2}\right)$ তম পদটি থাকবে তাকে আমরা মধ্যক শ্রেণি বলব। কিন্তু আমাদের শুধু মধ্যক শ্রেণি জানলেই হবে না, মধ্যকও নির্ণয় করতে হবে। শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক নির্ণয়ে আমরা নিচের সূত্রটি ব্যবহার করতে পারি।

যেখানে, $\mathrm{L} =$ যে শ্রেণিতে মধ্যক অবস্থিত সেই শ্রেণির নিম্নসীমা, $n =$ মোট গণসংখ্যা, $\mathrm{F}_c =$ মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, $f_m =$ মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা এবং $h =$ শ্রেণি ব্যবধান।

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক $= \mathrm{L} + \left(\frac{n}{2} - \mathrm{F}_c\right) \times \frac{h}{f_m}$

তোমরা জানো, শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক কোনো একটি শ্রেণিতে থাকে। কিন্তু মধ্যক কি ঐ শ্রেণির নিম্নসীমার চেয়ে কম হতে পারবে? যদি না পারে তবে নিশ্চয়ই মধ্যক ঐ শ্রেণির নিম্নসীমা (L) থেকে বেশি হবে। প্রশ্ন হলো কত বেশি হবে? এই প্রশ্নের উত্তর জানার জন্য চলো নিতু ও পুণ্যর মধ্যক নির্ণয়ের প্রক্রিয়াটি বিশ্লেষণী চোখ দিয়ে পর্যবেক্ষণ করি:

তোমাদের মতো নিতুর স্কুলের বাগানেও নানা ধরনের ফুলের গাছ আছে। মালীচাচার পাশাপাশি ক্লাসের সবাই পালা করে নিয়মিত বাগানের পরিচর্যা করে। তারা মাঝেমাঝেই গাছগুলোর উচ্চতা ও পাতার দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে। উদ্দেশ্য গাছগুলোর বৃদ্ধি স্বাভাবিক কি না। এমনই একদিন নিতু ও তার বন্ধু পুণ্য কতগুলো গাছের দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে ছক-১০.৯ তৈরি করেছে।

ছক- ১০.৯

গাছের দৈর্ঘ্য (সেমি.) (প্রায়)	100 – 110	110 – 120	120 – 130	130 – 140	140 – 150	150 – 160
গাছের সংখ্যা	5	8	15	16	10	6

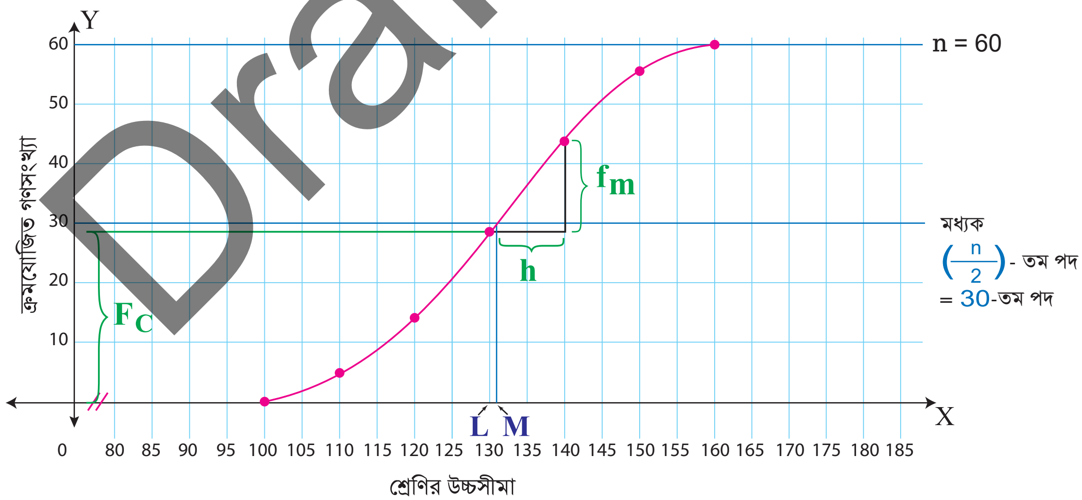
বাগানের গাছগুলো স্বাভাবিকভাবে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হচ্ছে কি না জানার জন্য নিতু ও পুণ্য স্থির করে তাদের সংগ্রহ করা উপাত্তের মধ্যক নির্ণয় করবে। সেজন্য প্রথমেই তারা ছক-১০.১০ এর মতো একটি সারণি তৈরি করে :

ছক- ১০.১০

গাছের দৈর্ঘ্য (সেমি.) (প্রায়)	100 – 110	110 – 120	120 – 130	130 – 140	140 – 150	150 – 160
গাছের সংখ্যা	5	8	15	16	10	6
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	5	13	28	44	54	60

মধ্যক নির্ণয় করার জন্য তারা নিচের কাজগুলো করল:

প্রথমে তারা ছক-১০.১০ থেকে অজিভ রেখা আঁকল।



চিত্র: ১০.৭

তারা ইতোমধ্যেই জেনেছে, শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা n হলে, $\left(\frac{n}{2}\right)$ তম পদের মান হবে মধ্যক। আর $\left(\frac{n}{2}\right)$ তম পদটি নিশ্চয়ই কোনো একটি শ্রেণিতে থাকবে। যে শ্রেণিতে $\left(\frac{n}{2}\right)$ তম পদটি থাকবে ঐটিই হবে মধ্যক শ্রেণি। নিতু ও পুণ্য মোট 60টি গাছের দৈর্ঘ্য উপাত্ত হিসেবে সংগ্রহ করে। সুতরাং মোট গণসংখ্যা $n = 60$ তাহলে, $\frac{n}{2} = \frac{60}{2}$ বা 30তম পদই হবে মধ্যক, যেটা অজিভ রেখা থেকে দেখা যাচ্ছে (130 – 140) শ্রেণিতে আছে।

অতএব মধ্যক শ্রেণি (130 – 140)। তোমাদের নিশ্চয়ই মনে আছে, শ্রেণিবদ্ধ উপাত্তের ক্ষেত্রে শ্রেণিতে উপাত্তগুলো সুষমভাবে সাজানো থাকে। এই ব্যাপারটা আমাদের এখানে মধ্যক নির্ণয়েও কাজে লাগবে। চিত্র ১০.৭-এ অজিভ রেখা থেকে পাওয়া মধ্যক হচ্ছে M বিন্দুর অবস্থান। L হচ্ছে যে শ্রেণিতে মধ্যক অবস্থিত সেই শ্রেণির নিম্নসীমা। $n =$ মোট গণসংখ্যা, $F_c =$ মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, $f_m =$ মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা এবং $h =$ শ্রেণি ব্যবধান।

$\therefore$ ছক- ১০.১০ অনুসারে, $L = 130,\ F_c = 28,\ f_m = 16,\ h = 10$

এখন তাহলে চিত্র-১০.৮ নিবিড়ভাবে পর্যবেক্ষণ করো।

সদৃশ ত্রিভুজের ধারণা ব্যবহার করে লিখতে পার,

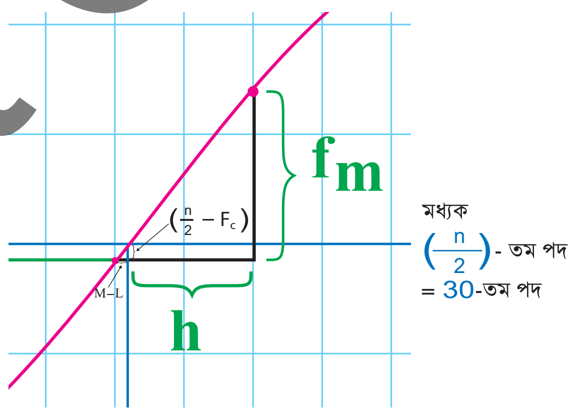
$$\frac{(M-L)}{h} = \frac{\left(\frac{n}{2}-F_c\right)}{f_m}$$

বা, $(M-L) = \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{f_m}$

$\therefore M = L + \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{f_m}$

সুতরাং, বাগানের গাছগুলোর উচ্চতার মধ্যক

$$M = L + \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{f_m}$$
$$= 130 + (30 - 28) \times \frac{10}{16}$$
$$= 130 + 2 \times \frac{5}{8} = 130 + 1.25$$
$$= 131.25$$



চিত্র- ১০.৮

$\therefore$ **নির্ণেয় মধ্যক 131.25 সেমি.(প্রায়)।** [তোমরা চাইলে এই হিসাবগুলো ক্যালকুলেটর ব্যবহার করেও করতে পার।]

মধ্যকের মান থেকে আমরা বলতে পারি 'অর্ধেক সংখ্যক গাছের দৈর্ঘ্য 131.25 সেমি. এর কম এবং অর্ধেক সংখ্যক গাছের দৈর্ঘ্য 131.25সেমি. এর বেশি। অর্থাৎ মধ্যক-এর মান থেকে গাছের দৈর্ঘ্য সম্পর্কে একটি সাধারণ বৈশিষ্ট্য পাওয়া গেল।

দলগত কাজ :

নিজেদের সংগ্রহ করা উপাত্তের শ্রেণি বিন্যস্ত গণসংখ্যা সারণি থেকে অজিভ রেখা অঙ্কন করে মধ্যক নির্ণয় করো। উপাত্তের একটি সাধারণ বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করো।

প্রচুরক (Mode)

তোমাদের স্কুলের মতো নিতুর স্কুলেও ১৪ই মার্চকে পাই দিবস হিসেবে উদযাপন করা হয়। প্রতি বছরের মতো এই বছরেও দিবসটি পালন করার উদ্যোগ নেওয়া হয়েছে। নিতু ও তার বন্ধুরা ঠিক করেছে, এবারে নাচ, গান, আবৃত্তি, আঁকা ও অভিনয়ের পাশাপাশি ষষ্ঠ শ্রেণির শিক্ষার্থীদের সঙ্গে একটি মজার কুইজ বা ম্যাজিকের আয়োজন করবে। আলোচনার পর ষষ্ঠ শ্রেণির 36 জন শিক্ষার্থীদের সমান তিনটি দলে ভাগ করেছে। প্রথম দলের 12 জনের প্রত্যেককে 10টি মজার ধাঁধার উত্তর লিখতে দিলো।

প্রথম দলের 12 জনের প্রত্যেকে যতগুলো সঠিক উত্তর লিখেছে, সেগুলো হলো : 6, 5, 4, 6, 7, 5, 4, 6, 7, 3, 6, 8। তারা সঠিক উত্তরের তথ্যটিকে তালিকাবদ্ধ করে দেখে:

সঠিক উত্তরের সংখ্যা x_i	3	4	5	6	7	8
শিক্ষার্থীর সংখ্যা f_i	1	2	2	4	2	1

এই ছক থেকে দেখা যায়, 6টি সঠিক উত্তর দিয়েছে এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা সবচেয়ে বেশি। তোমরা কি বলতে পারবে তালিকায় প্রাপ্ত উপাত্তের প্রচুরক কত হবে? ষষ্ঠ শ্রেণিতে তোমরা শিখেছ, উপাত্তগুলোর মধ্যে যে সংখ্যা সর্বাধিকবার উপস্থাপিত হয়, সেই সংখ্যাই প্রচুরক। তাহলে তোমরাই বলো ছকের তথ্যানুসারে প্রচুরক কত হবে?

এবার নিতু ও তার বন্ধুরা ষষ্ঠ শ্রেণির দ্বিতীয় দলের 12 জনের প্রত্যেককে অন্য 10টি মজার ধাঁধার উত্তর লিখতে দিলো।

দ্বিতীয় দলের 12 জনের প্রত্যেকে যতগুলো সঠিক উত্তর লিখেছে, সেগুলো হলো : 5, 7, 4, 6, 7, 5, 4, 6, 4, 3, 6, 8

তারা সঠিক উত্তরের তথ্যটিকে তালিকাবদ্ধ করে দেখে :

সঠিক উত্তরের সংখ্যা x_i	3	4	5	6	7	8
শিক্ষার্থীর সংখ্যা f_i	1	3	2	3	2	1

উপরের ছক থেকে দেখা যায়, 4টি সঠিক উত্তর দিয়েছে 3 জন এবং 6টি সঠিক উত্তরও দিয়েছে 3 জন শিক্ষার্থী। এক্ষেত্রে প্রচুরক দুইটি। প্রচুরক দুটি হলো 4 ও 6। সুতরাং প্রচুরক এক বা একাধিক হতে পারে। সর্বশেষ তারা তৃতীয় দলের প্রত্যেককে একটু জটিল কিন্তু মজার 10টি ধাঁধাঁর উত্তর লিখতে দিলো। ফলাফল হলো : 12 জনের প্রত্যেকেই একটি করে সঠিক উত্তর দিতে পেরেছে।

প্রচুরক কী হবে ভেবে ব্যাখ্যাসহ উত্তর লেখো।

একক কাজ :

ক) তোমাদের ক্লাসের সবার গতমাসের অনুপস্থিতির তথ্য সংগ্রহ করো।

খ) অনুপস্থিতির কারণগুলো চিহ্নিত করো। ক্ষেত্রগুলো অনুসন্ধান ও বিশ্লেষণ করে চিহ্নিত কারণগুলো পর্যালোচনা করো।

গ) প্রয়োজনে অনুপস্থিত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয় করো।

ঘ) সমস্যাটি সমাধানের লক্ষ্যে একটি প্রস্তাব বা মডেল উপস্থাপন করো

প্রচুরক কেন প্রয়োজন

তৈরি করা পোশাক বা জুতো কেনার জন্য প্রায়শই তোমাকে বাজারে বা দোকানে যেতে হয়। তুমি নিশ্চয়ই লক্ষ করেছ, ছোটো এবং মাঝারি সাইজের জিনিসপত্র দোকানে সবচেয়ে বেশি পাওয়া যায়। যেমন– একটি বিশেষ কোম্পানির জুতোর ক্ষেত্রে মেয়েদের

জন্য 4 নম্বর ও ছেলেদের জন্য 7 ও 8 নম্বর জুতোর সংখ্যাই বেশি। লম্বা মানুষের জামা-প্যান্ট কেনা যেমন কষ্টের, তেমনি আবার 10 নম্বর জুতো সব দোকানে পাওয়াও যায় না। ভেবে দেখো তো এর কারণ কী? সহপাঠীর সঙ্গে আলাপ করো। তারপর দুই-তিন লাইনে নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো।

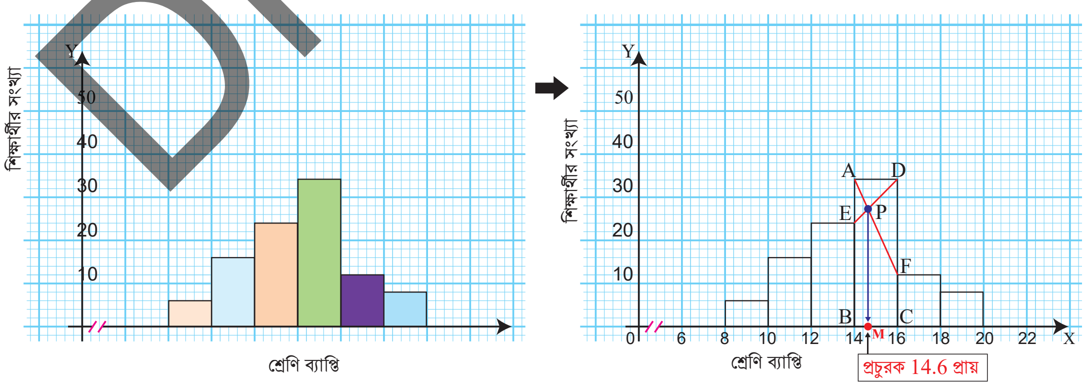
শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয়

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের ক্ষেত্রে শুধু উপাত্ত দেখে প্রচুরক নির্ণয় সম্ভব নয়। প্রথমে প্রচুরক শ্রেণি খুঁজে বের করতে হবে। অর্থাৎ কোন শ্রেণিতে সবচেয়ে বেশি গণসংখ্যা আছে তা দেখতে হবে। কারণ প্রচুরকটি ঐ শ্রেণিতেই থাকবে। এক্ষেত্রে আমরা আয়তলেখের সাহায্য নিতে পারি।

আয়তলেখ থেকে প্রচুরক নির্ণয়

আমরা আয়তলেখ আঁকা শিখেছি। আয়তলেখ থেকেও প্রচুরক নির্ণয় করা যায়। মনে করে দেখো ছক-১০.২ -এ নবম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের উপস্থিতি নিয়ে আয়তলেখ অঙ্কন করেছিলে। ঐ আয়তলেখ থেকে কীভাবে প্রচুরক নির্ণয় করা যায় তা দেখি।

উপস্থিতির শ্রেণি	8 – 10	10 – 12	12 – 14	14 – 16	16 – 18	18 – 20
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	6	16	24	34	12	8



চিত্র: ১০.৯

চিত্রে প্রচুরক শ্রেণির আয়তক্ষেত্রটি হলো ABCD (ছক-১০.৯)। এবার A, F ও E,D যোগ করি। AF ও ED পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করেছে। P বিন্দু থেকে x- অক্ষের উপর PM লম্ব অঙ্কন করি, যা x- অক্ষকে M বিন্দুতে ছেদ করেছে। হিসাব করে দেখি M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (14.6, 0)। এই M বিন্দুর স্থানাঙ্কের ভুজই হবে নবম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের উপস্থিতি সম্পর্কে সংগৃহীত উপাত্তের প্রচুরক। অর্থাৎ, নির্ণেয় প্রচুরক 14.6 (প্রায়)।

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক আমরা সূত্রের মাধ্যমে নির্ণয় করতে পারব।

প্রচুরক নির্ণয়ের জন্য ছক কাগজ থেকে M বিন্দুর স্থানাঙ্কের ভুজ নির্ণয় করতে ভুল হওয়ার সম্ভাবনা থাকে। সরাসরি জ্যামিতিক পদ্ধতি ব্যবহার করে আরও সহজেই সঠিক মান পাওয়া যাবে।

মধ্যক নির্ণয়ের সময় আমরা একই রকম সমস্যা সমাধানে সদৃশ ত্রিভুজের ধারণা প্রয়োগ করেছিলাম। একটা সহজ সূত্রও পেয়েছিলাম। প্রচুরকের ক্ষেত্রেও একইভাবে একটি সূত্র প্রতিষ্ঠা করি।

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয়ের জন্য আমরা ব্যবহার করতে পারি, প্রচুরক = $L + \frac{f_1}{f_1+f_2} \times h$

যেখানে, L = যে শ্রেণিতে প্রচুরক অবস্থিত সেই শ্রেণির নিম্নসীমা, n = মোট গণসংখ্যা, f_1 = প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা ও তার পূর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যার পার্থক্য, f_2 = প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা ও তার পরবর্তী শ্রেণির গণসংখ্যার পার্থক্য এবং h = শ্রেণি ব্যবধান।

তোমাদের মতো নিতুও তার গ্রামের 40টি পরিবারের সাপ্তাহিক আয়ের (টাকায়) তথ্য সংগ্রহ করে। সংগৃহীত উপাত্তগুলোর শ্রেণি বিন্যস্ত তালিকাটি হলো :

সাপ্তাহিক আয় (টাকা)	4000–5000	5000–6000	6000–7000	7000–8000	8000–9000	9000–10000
পরিবারের সংখ্যা	5	8	12	10	3	2

চলো, সূত্র প্রয়োগ করে নিতুর তৈরি তালিকা থেকে প্রচুরক নির্ণয় করি :

তোমরা জানো, শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক বের করতে হলে প্রথমে প্রচুরক শ্রেণি নির্ণয় করতে হয়। তালিকা অনুসারে, 40টি পরিবারের মধ্যে সবচেয়ে বেশি 12টি পরিবারের সাপ্তাহিক আয় (6000 – 7000) টাকা।

সুতরাং তালিকায় প্রচুরক শ্রেণি (6000 – 7000)।

$\therefore$ শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক $= \mathbf{L} + \frac{f_1}{f_1+f_2} \times \boldsymbol{h}$

$= 6000 + \frac{4}{4+2} \times 1000 = 6000 + \frac{4}{6} \times 1000$

$= 6{,}666.67$ টাকা (প্রায়)।

$L = 6000$
$f_1 = (12 - 8) = 4$
$f_2 = (12 - 10) = 2$
এবং $h = 1000$

কিন্তু শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক শ্রেণি সব সময় শ্রেণিগুলোর মাঝামাঝি নাও থাকতে পারে। কোনো কোনো ক্ষেত্রে প্রথমটি আবার কখনো শেষেরটিও হতে পারে। সেক্ষেত্রে কী হবে?

এবার আরেকটি ঘটনা লক্ষ করো। নিতু তার গ্রামের 40টি পরিবারের সাপ্তাহিক আয়ের (টাকায়) পাশাপাশি প্রতিটি পরিবারের লোকসংখ্যার বয়সের (বছরে) তথ্য সংগ্রহ করে নিচের তালিকাটি তৈরি করে।

বয়স (বছরে)	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70
লোকসংখ্যা	82	27	25	52	50	32	12

তালিকা থেকে দেখতে পাই, 40টি পরিবারের মধ্যে (1 – 10) বছর বয়সের শিশুর সংখ্যা সবচেয়ে বেশি। সুতরাং, তালিকায় প্রচুরক শ্রেণি হবে (1 – 10)।

সুতরাং, $L = 1$, $f_1 = (82 - 0) = 82$, $f_2 = (82 - 27) = 55$ এবং $h = 10$

$\therefore$ শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক $= L + \frac{f_1}{f_1+f_2} \times h = 1 + \frac{82}{82+55} \times 10 = 1 + \frac{82}{137} \times 10$

$= 6.99$ বছর (প্রায়)।

আবার মনে করি, দশম শ্রেণির কয়েকজন শিক্ষার্থীর ওজন (কেজিতে) মেপে নিচের তালিকাটি তৈরি করা হলো:

ওজন (কেজিতে)	35 – 40	40 – 45	45 – 50	50 – 55	55 – 60
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	2	3	10	18	32

এখানে গণসংখ্যা সর্বাধিক 32 আছে (55 – 60) শ্রেণিতে। সুতরাং প্রচুরক শ্রেণি (55 – 60)।

সুতরাং $L = 55, f_1 = (32 - 18) = 14, f_2 = (32 - 0) = 32$ এবং $h = 5$

$\therefore$ শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক $= L + \frac{f_1}{f_1+f_2} \times h = 55 + \frac{14}{14+32} \times 5 = 55 + \frac{14}{46} \times 5$

$= 56.52$ কেজি (প্রায়)।

দলগত কাজ

ক) প্রত্যেক দল নিজেদের শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের আয়তলেখ থেকে প্রচুরক নির্ণয় করো।

খ) সূত্রের মাধ্যমে প্রচুরক নির্ণয় করে তা যাচাই করো।

গ) প্রচুরকের প্রাপ্ত মান থেকে সংগৃহীত উপাত্ত সম্পর্কে কী সিদ্ধান্ত নেয়া যায় লেখো।

এ অভিজ্ঞতায় তোমরা দলগত কাজের মাধ্যমে উপাত্ত সংগ্রহ ও বিশ্লেষণ করেছ। বিশ্লেষণের ফলাফল থেকে ঐ ঘটনার কিছু সাধারণ বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করেছ। পরিসংখ্যান মূলত তথ্য সংগ্রহ ও বিশ্লেষণের মাধ্যমে সিদ্ধান্ত গ্রহণেরই বিজ্ঞান। তোমরা তথ্য সংগ্রহ, তথ্য উপস্থাপন এবং কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপের যে ধাপগুলো অনুসরণ করেছ তা দৈনন্দিন জীবনের যে কোনো সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে ব্যবহার করা হয়ে থাকে। কেন্দ্রীয় প্রবণতার প্রতিটি পরিমাপক অর্থাৎ, গড়, মধ্যক এবং প্রচুরক যে কোনো ঘটনার সাধারণ বৈশিষ্ট্যগুলো শনাক্ত করতে তথা ঘটনাটি সম্পর্কে সিদ্ধান্ত গ্রহণে অবদান রাখে। সুতরাং, উপরে বর্ণিত বিভিন্ন পদ্ধতিতে বিন্যস্ত অথবা অবিন্যস্ত উপাত্তকে বিশ্লেষণ করে কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করার দক্ষতা অর্জন করা গুরুত্বপূর্ণ। একই সঙ্গে উপাত্ত উপস্থাপনের জন্য কীভাবে আয়তলেখ, গণসংখ্যা বহুভুজ, অজিভ রেখা প্রভৃতি লেখচিত্রের ব্যবহার করা যায় তা আয়ত্ত করাও জরুরি।

অনুশীলনী

১। অষ্টম শ্রেণির কয়েকজন শিক্ষার্থীর উচ্চতার (সেন্টিমিটার) ছক দেওয়া আছে। নিচের প্রশ্নগুলো সমাধান করো।

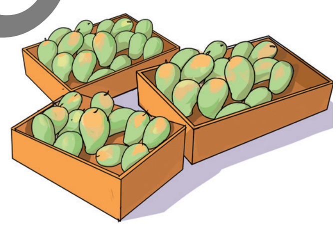
90, 140, 97, 125, 97, 134, 97, 97, 110, 125, 110, 134, 110, 125,110, 140, 125, 134, 125, 125, 134, 110, 125, 97, 125, 110, 125, 97,134, 125, 110, 134, 125,134, 90,140, 148, 148, 110, 125

ক) উপাত্তগুলোকে মানের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজাও।

খ) উপাত্তগুলোকে মানের অধঃক্রম অনুসারে সাজাও।

গ) শিক্ষার্থীদের গড় উচ্চতা নির্ণয় করো।

২। মিজান সাহেব একজন আম বিক্রেতা। তিনি 50 বক্স আম কিনলেন। প্রতিটি বক্সে আমের সংখ্যা সমান নয়। কিন্তু গড়ে প্রতিটি বক্সে কটি আম আছে জানা প্রয়োজন। নিচের সারণি থেকে 50 টি বক্সে গড়ে কটি আম আছে নির্ণয় করো।



আমের সংখ্যা	51 – 53	54 – 56	57 – 59	60 – 62	63 – 65
বক্সের সংখ্যা	6	14	16	9	5

৩। পাশের লেখচিত্রটি লক্ষ করো।

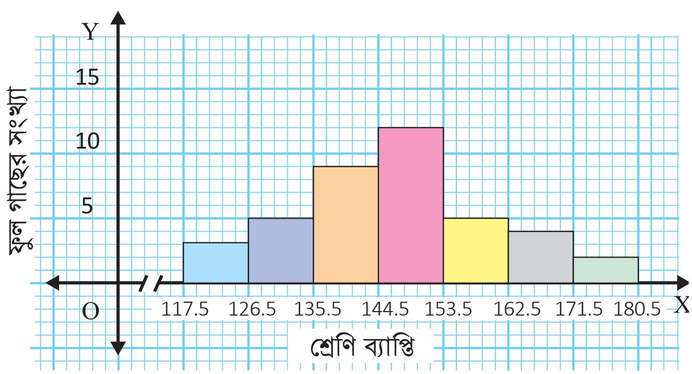
ক) লেখচিত্রটির নাম লেখো।

খ) লেখচিত্রের উপাত্তগুলো কোন ধরনের উপাত্ত?

গ) এর প্রচুরক শ্রেণি কত?

ঘ) লেখচিত্র থেকে শ্রেণি বিন্যস্ত সারণি তৈরি করো।

ঙ) সারণি থেকে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয় করো।



চিত্র: ১০.১০

৪।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100
গণসংখ্যা	7	11	p	9	13

গণসংখ্যা নিবেশন তালিকার গাণিতিক গড় 54 হলে, প্রত্যক্ষ পদ্ধতিতে p এর মান নির্ণয় করো। তারপর সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির সাহায্যে প্রাপ্ত p এর মানের সত্যতা যাচাই করো।

৫। একটি পোশাক কারখানার শ্রমিকদের দৈনিক মজুরির (টাকায়) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। উপাত্তের মধ্যক 525 হলে, x ও y এর মান নির্ণয় করো। কারখানায় শ্রমিকের মোট সংখ্যা 120 জন।

দৈনিক মজুরি (টাকা)	শ্রমিকের সংখ্যা
300 – 400	12
400 – 500	20
500 – 600	x
600 – 700	30
700 – 800	y
800 – 900	5
900 – 1000	4

৬। একটি স্বাস্থ্য কেন্দ্রের 100 রোগীর বয়সের (বছরে) শ্রেণি ব্যাপ্তি ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যার তালিকা থেকে শ্রেণি অনুসারে রোগীর সংখ্যা নির্ণয় করো।

বয়স (বছরে)	0 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70
রোগীর সংখ্যা							
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	5	9	24	41	68	85	100

৭। নাগরী বাজারের 100টি দোকানের দৈনিক লাভের (টাকায়) পরিমাণের ছকটি হলো–

প্রতি দোকানের লাভ (টাকা)	300 – 350	350 – 400	400 – 450	450 – 500	500 – 550	550 – 600
দোকানের সংখ্যা	10	16	28	22	18	6

ক) প্রদত্ত তথ্যের আলোকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করো।

খ) কতগুলো দোকানে দৈনিক 500 টাকার কম লাভ হয়?

৮। অষ্টম শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীর পরিবারের সদস্যদের বয়সের (বছরে) অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ বিন্যস্ত করে নিচের তালিকাটি তৈরি করা হয়েছে।

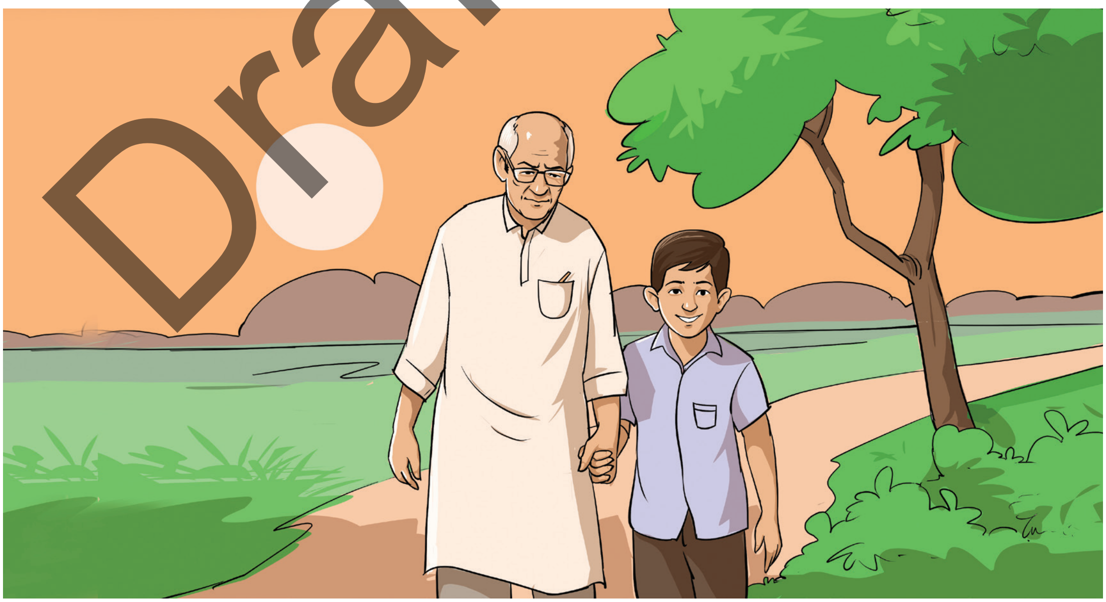
বয়স (বছর)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
গণসংখ্যা	30	60	82	94	66	48	20

ক) উপাত্তের আয়তলেখ অঙ্কন করো।

খ) উপাত্তের আয়তলেখ থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকো।

গ) উপাত্তের আয়তলেখ ছাড়া গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকো।

৯। সজল তার দাদুর সঙ্গে প্রতিদিন পার্শ্ববর্তী একটি পার্কে প্রাতঃভ্রমণে যায়। সে মনে মনে ঠিক করেছে আজ যতজন প্রাতঃভ্রমণে এসেছে তাদের বয়স অনুযায়ী তথ্য সংগ্রহ করবে।



সজলের সংগ্রহ করা উপাত্তের ছকটি হলো :

বয়স (বছরে)	41 – 45	46 – 50	51 – 55	56 – 60	61 – 65
গণসংখ্যা	12	15	25	18	10

ক) প্রত্যক্ষ ও সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয় করো।

খ) উপাত্তের মধ্যক নির্ণয় করো।

গ) সজলের তথ্য সংগ্রহের তালিকা ব্যবহার করে আয়তলেখ অঙ্কন করো।

ঘ) প্রচুরক নির্ণয় করো।

ঙ) উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করো।

চ) উপাত্তের অজিভ রেখা অঙ্কন করো।

১০। মনে করো তোমার এলাকায় মাঝেমাঝে বিদ্যুৎ থাকে না। সমস্যাটি কীভাবে সমাধান করবে, তার জন্য একটি পরিকল্পনা করো। পরিকল্পনা অনুসারে নিচের কাজগুলো করো:

ক) প্রতিবেশী পরিবারগুলোর এক মাসের বিদ্যুৎ খরচের তথ্য সংগ্রহ।

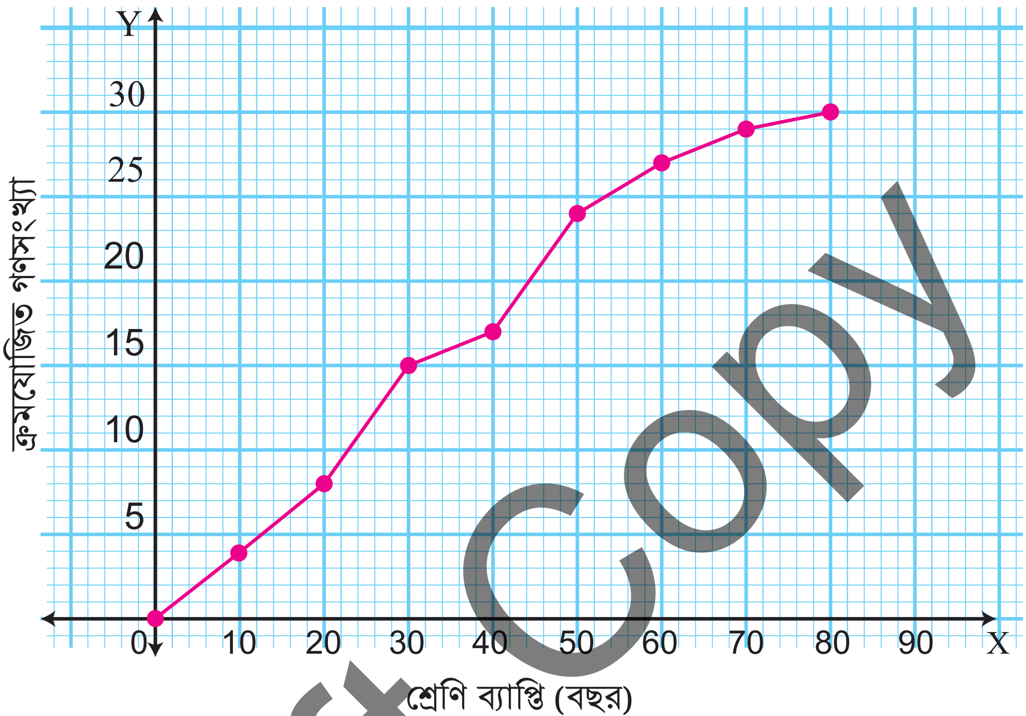
খ) প্রতিমাসে পরিবারগুলো গড়ে কী পরিমাণ বিদ্যুৎ খরচ করে তা জানার জন্য উপাত্তগুলোকে শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করে প্রত্যক্ষ ও সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি ব্যবহার করে গড় নির্ণয়।

গ) বিদ্যুতের চাহিদা অনুসারে করণীয় সম্পর্কে তোমার মতামত বা প্রস্তাব উপস্থাপন।

১১।

(ক) তোমার পরিবারসহ নিকটাত্মীয় 25 জন সদস্যের বয়সের তথ্য (বছরে) সংগ্রহ করে লিপিবদ্ধ করো। (প্রয়োজনে অভিভাবকের সাহায্য নাও)

(খ) তোমার বন্ধুর পরিবারসহ তার নিকটাত্মীয় 30 জন সদস্যের বয়সের (বছরে) সংগৃহীত তথ্যের লেখচিত্র:



চিত্র: ১০.১১

(i) এর উপাত্ত ব্যবহার করে–

ক) একটি গণসংখ্যা সারণি তৈরি করো।

খ) আয়তলেখ অঙ্কন করে আয়তলেখ থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ ও প্রচুরক নির্ণয় করো।

গ) প্রত্যক্ষ ও সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গাণিতিক গড় নির্ণয় করো।

ঘ) মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয় করো।

ঙ) (ii) এর চিত্র থেকে গণসংখ্যা সারণি তৈরি করো।

চ) তোমার ও তোমার বন্ধুর পরিবারের সদস্যদের গড় বয়সের তুলনামূলক পার্থক্য লেখো। এক্ষেত্রে পরিবারের সদস্য সংখ্যা, বয়স ও শ্রেণি ব্যবধান গড়কে প্রভাবিত করে কি না ব্যাখ্যা করো।

ছ) চিত্র ও ছক এর মধ্যে কোনটির মাধ্যমে তথ্য উপস্থাপন সহজবোধ্য বলে তুমি মনে করো? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

১২। উপাত্ত সংগ্রহ থেকে শুরু করে তথ্য বিশ্লেষণ করে সিদ্ধান্ত গ্রহণ পর্যন্ত কীভাবে কাজগুলো সম্পন্ন করা হয়েছে তা তোমার দলের কাজের ক্রমানুসারে সাজাও। প্রতিটি ধাপে তোমার দলের কাজের সংক্ষিপ্ত বর্ণনা লিখে উপস্থাপন করো। এখানে ধাপগুলো এলোমেলো করে লেখা আছে। যে ধাপ তোমাদের অনুসরণ করতে হয়নি তা বাদ দিবে।

উপাত্ত শ্রেণিবদ্ধকরণ ➡ উপাত্ত সংগ্রহ ➡ উপাত্ত বিন্যস্তকরণ ➡ উৎসের নির্ভরযোগ্যতা যাচাই ➡ পরিসর নির্ধারণ ➡ উৎস নির্বাচন ➡ শ্রেণি ব্যবধান নির্ণয় ➡ প্রচুরক ও মধ্যক নির্ণয় ➡ কেন্দ্রীয় প্রবণতা নির্ণয় ➡ গাণিতিক গড় নির্ণয় ➡ কেন্দ্রীয় প্রবণতার মান থেকে উপাত্ত সম্পর্কে সিদ্ধান্ত গ্রহণ ➡ ক্রমযোজিত গণসংখ্যা নির্ণয় ➡ প্রাপ্ত মধ্যক ও প্রচুরকের মানের ব্যাখ্যা প্রদান ➡ আয়তলেখ থেকে প্রচুরক নির্ণয়।